

RELOJES DE SOL PROYECTIVOS

PROJECTIVE SUNDIALS

LUIS HIDALGO VELAYOS, miembro de la AARS

RESUMEN

Se describe una familia de relojes de sol derivados de la proyección de un reloj ecuatorial según una dirección de proyección dada sobre planos de proyección fácilmente identificables. Para ello, se utilizan métodos analíticos de fácil ejecución, agrupando una serie de relojes poco habituales, algunos de ellos bastante conocidos como son los llamados analemáticos de Foster-Lambert, Vaulezard, Parent y Oughthred.

ABSTRACT

Describes a sundials family derived from a equatorial sundial projection in a given projection direction over easily identifiable projection planes. Easy to use analytic methods are employed, grouping a series of uncommon dials, some of them well known like the so called Foster-Lambert, Vaulezard, Parent and Oughthred analemmatics.

GENERALIDADES

Por medio de la proyección de un reloj ecuatorial o de los círculos de la esfera celeste se pueden generar toda una clase de relojes de sol que llamaremos **proyectivos**, en el intento de agruparlos en una serie de relojes poco habituales, algunos de ellos ya muy conocidos como son los llamados **analemáticos** de Foster-Lambert, Vaulezard, Parent y Oughthred.

De entre todos los posibles elegiremos aquellos que tienen el plano de proyección (PP) fácilmente identificable, tales como el plano horizontal, el polar, el meridiano o el vertical no declinante. El reloj vertical declinante lo consideraremos, en principio, como un portátil. Incluiremos también los que tienen gran facilidad para su trazado, o porque son capaces de proporcionar la hora oficial.

El objeto de estas líneas es hacer un estudio de este tipo de relojes, utilizando métodos analíticos por su gran exactitud y facilidad de ejecución, en vez de usar construcciones gráficas. Añadiremos el cálculo de la longitud del estilo por ser esencial, pues la lectura se hace por la intersección de la sombra con la línea de referencia (recta o curva).

En lo que sigue llamaremos a la oblicuidad de la eclíptica ϵ [épsilon] = $23,44^\circ$, a la latitud del lugar ϕ [fi] = $40,4^\circ$ N (Madrid) y al radio R . L_g es la longitud mínima que debe tener el estilo [o gnomon], H_n y H_s son los horizontes Norte y Sur y QQ' es el ecuador celeste. El segmento Ef determina la mitad del desplazamiento en la escala de las fechas.

La declinación del Sol δ [delta] para los días del comienzo de los signos del zodiaco, que determinarán el desplazamiento del estilo en la escala de fechas, son:

0,00°	Aries (20 marzo) y Libra (23 sept.) – equinoccios
11,48°	Tauro (20 abril) y Virgo (23 agosto)
20,15°	Géminis (21 mayo) y Leo (23 julio)
23,44°	Cáncer (21 junio) - solsticio de verano
-11,48°	Escorpio (23 octubre) y Piscis (18 febrero)
-20,15°	Sagitario (22 noviembre) y Acuario (20 enero)
-23,44°	Capricornio (22 dic.) - solsticio de invierno

Por supuesto que nada nos impide marcar en la escala de fechas intervalos de 10 días.

CLASIFICACIÓN

Estos relojes de sol proyectivos se pueden agrupar de la siguiente forma:

- Relojes derivados de un reloj ecuatorial proyectado según una **dirección de proyección** (DP) dada sobre un **plano de proyección** (PP) elegido, cuando tal dirección (DP) está en el plano meridiano.
- Relojes proyectados, como los anteriores, según una dirección (DP) que está FUERA del plano meridiano.
- Relojes proyectados desde un **punto de proyección** (P) sobre un plano (PP) dado.
- Relojes derivados de la proyección de los **círculos de la esfera** celeste desde una dirección (DP), o un punto (P), sobre un plano (PP) elegido.

CUADRANTES DEL GRUPO A

Derivados de un ecuatorial proyectado según una dirección (DP) que está en el plano meridiano.

En los relojes de este grupo, la esfera celeste sufre una proyección cilíndrica, de tal modo que la esfera está inscrita en un cilindro y es tangente en su plano ecuatorial. Podemos suponer que el Sol se mueve sobre la superficie del cilindro, con declinaciones δ entre los valores máximos ϵ y $-\epsilon$. En estas condiciones las variaciones de la declinación δ se transmitirán a un segmento, que determinará el desplazamiento del estilo en la semi-escala de las fechas (Ef), si procede.

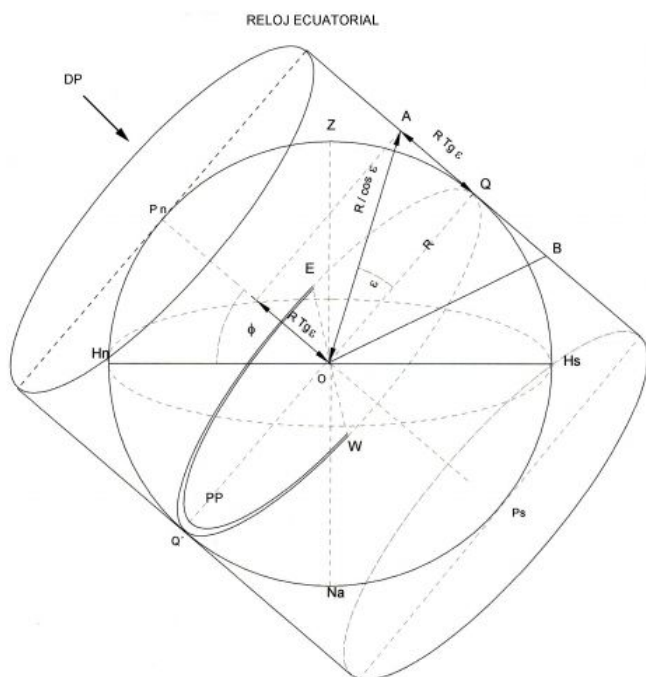
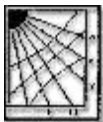


Figura 1. Reloj ecuatorial

Reloj ecuatorial. Fig. 1. En este caso la dirección de proyección (DP) es el eje del mundo y el plano de proyección (PP) elegido es el ecuador celeste. El modelo clásico de reloj ecuatorial nos puede servir para familiarizarnos con el tema, puesto que es el fundamento de otros muchos. Es evidente que el cuadrante así obtenido es el propio ecuador y los puntos horarios están separados por ángulos de 15° .

El estilo está fijo en el centro O y su longitud mínima Lg será: $AQ = R \tan \varepsilon$. De esta forma, cuando la declinación sea máxima ($\delta = \varepsilon$), la sombra del estilo será igual al radio del círculo ecuatorial.

Los dibujos que siguen, mantendrán la misma estructura con las mismas letras.

Las distancias $OA = R/\cos \varepsilon$ y $AQ = R \tan \varepsilon$ se utilizarán para los cálculos básicos.

A-1) Cuadrante lineal horizontal. Denominado así porque tanto la escala de fechas como la de las horas están sobre líneas rectas y porque su plano de proyección (PP) es el horizonte local. La dirección (DP) de proyección es la del ecuador.

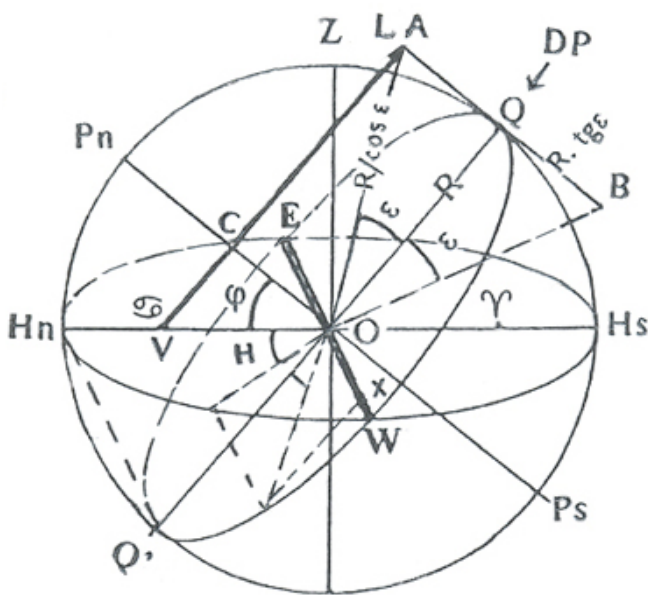


Figura 2. Cuadrante lineal horizontal

En la fig. 2 puede verse que los extremos de los radios del círculo del reloj ecuatorial se proyectan sobre la línea Este-Oeste (E-W), en la que está la escala de horas, a una distancia: $OX = R \sin H$, siendo H el ángulo horario.

La escala de las fechas (Ef) está en la meridiana del lugar (Hn-Hs). Para los días de los equinoccios (21 de marzo y 23 de septiembre) el estilo debe estar en el centro O y por tanto en el plano ecuatorial QQ'. En el solsticio de verano (21 de junio), que corresponde a la declinación máxima ($\delta = \varepsilon$), el estilo ha de estar en el punto V.

Recalcamos que la inclinación del estilo sobre el horizonte Sur es paralelo a la dirección de proyección, es decir, forma con esta dirección un ángulo de $90^\circ - \varphi$.

Su distancia al centro O será: $OC = AQ = R \tan \varepsilon$ luego, Ef vale: $OV = R \tan \varepsilon / \cos \varphi$.

La longitud del estilo VL (VA) es tal que su sombra tocará en la línea E-W.

En el triángulo OVA, usando la ley de los senos, se tiene que: $VL/\sin(90^\circ + \varphi - \varepsilon) = OV/\sin \varepsilon$.
Por tanto: $VL = R \cos(\varphi - \varepsilon)/\cos \varphi \cos \varepsilon = R(1 + \tan \varepsilon \tan \varphi)$.

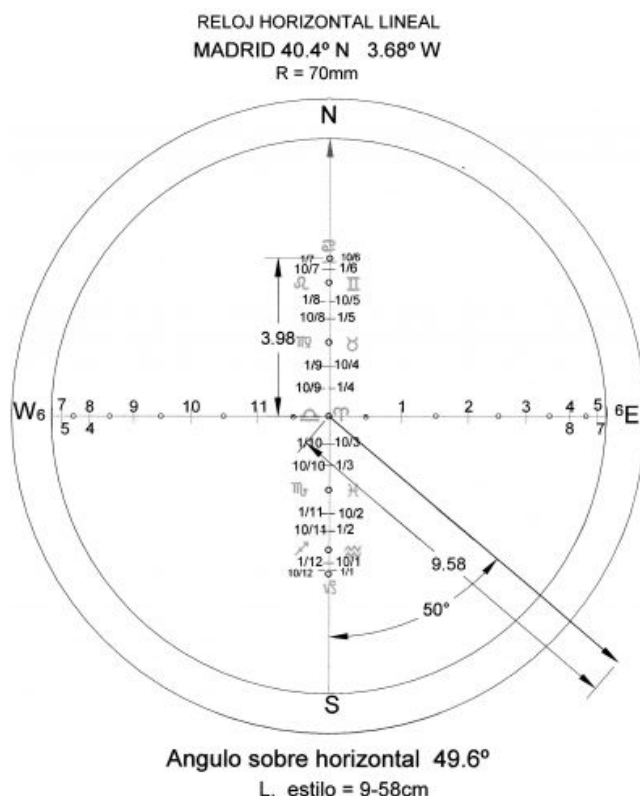
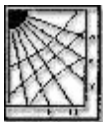


Figura 2b. Ejemplo de cuadrante lineal horizontal (calculado para Madrid)

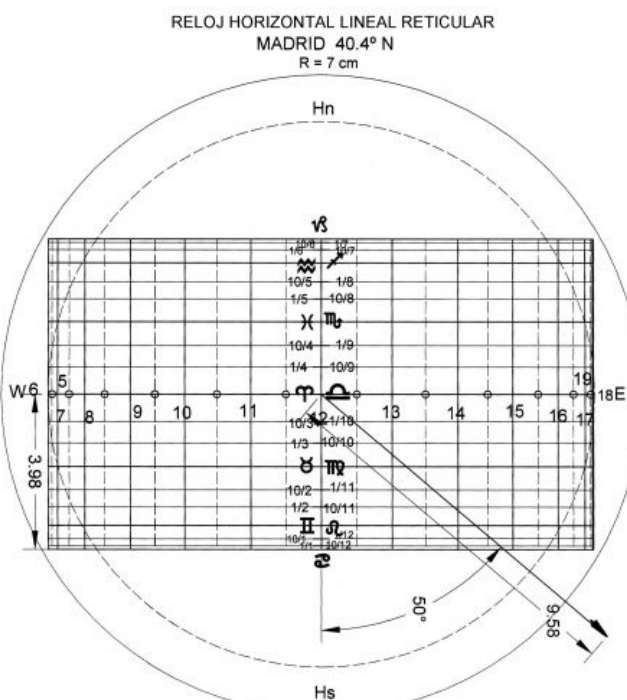


Figura 3. Ejemplo de cuadrante lineal horizontal reticular (calculado para Madrid)

Si se quiere evitar el inconveniente de tener que mover el estilo, típico de los relojes "analemáticos".

Basta con trazar perpendiculares a la línea Hn-Hs, por los puntos que corresponden al comienzo de los signos del zodiaco y por los puntos horarios perpendiculares a la línea Este-Oeste (E-W), con lo que se forma un retículo, como se puede apreciar en la fig. 3, que es una vista superior del círculo horizontal. Es un artificio que deja fijo el estilo y desplaza la escala.

Esta es una variante, que llamaremos **reticular**, con la particularidad de una **inversión** de los signos del zodiaco.

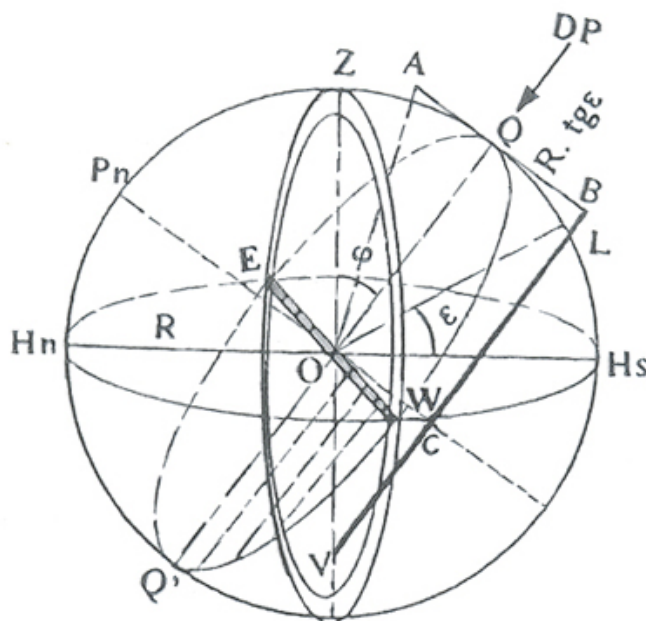
La lectura de la hora se hará por interpolación visual. En la fig. 3, la sombra del estilo está señalando las 13 horas, si la determinación se efectúa en la fecha en que el Sol entra en el signo de Géminis o de Leo.

Como característica curiosa, este tipo de cuadrante presenta el fenómeno de la **retrogradación** de la sombra y es capaz de marcar todas las horas de insolación posible del lugar. Merced a este fenómeno, por el que la sombra invierte su dirección, se le dota de las marcas de las horas 4-5 y 19-20, como se aprecia en la figura.

Puesto que todo cuadrante se debe orientar correctamente, se le suele dotar de una brújula, mejor aún si es susceptible de poder corregir la declinación magnética.

En cuanto a su adaptación a otras latitudes, será preciso levantar el reloj del lado Sur cuando se traslade a otra latitud menor y del Norte cuando sea para una latitud mayor, de modo que en la nueva posición el ecuador del cuadrante en la nueva latitud y el ecuador celeste queden en el mismo plano.

A-2) Horologium Erectus [lineal vertical ortomeridiano]. La dirección de proyección (DP) es la del ecuador y el plano de proyección es el **primer vertical**, es decir, el plano vertical ortomeridiano. Fig. 4.



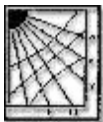


Figura 4. Horologium Erectus, cuadrante lineal vertical ortomeridiano

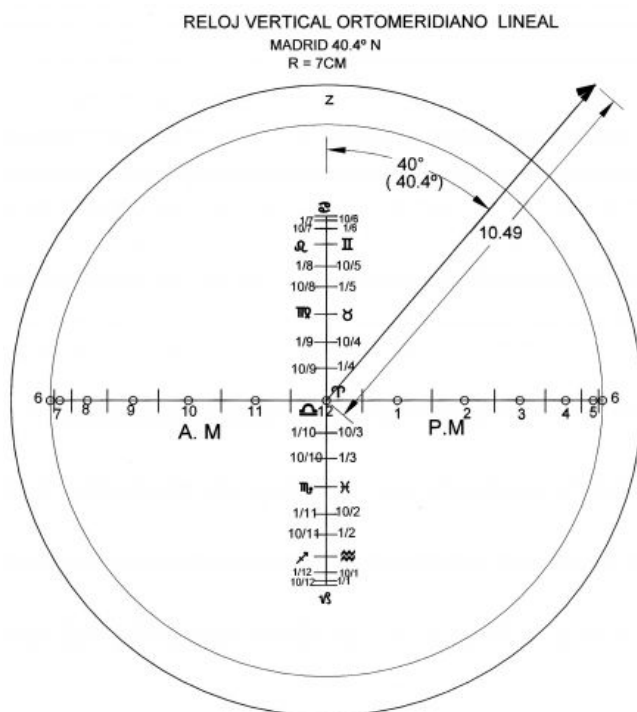


Figura 4b. Ejemplo de Horologium Erectus, cuadrante lineal vertical ortomeridiano (calculado para Madrid)

Lo denominamos de esta manera por tener su estilo elevado, teniendo gran contraste con el cuadrante vertical convencional en el que está dirigido hacia abajo.

La línea de las horas está en la dirección E-W, como en el caso anterior, porque la dirección de proyección (DP) es paralela al ecuador QQ'. La escala de fechas (Ef) está sobre el plano vertical, debiendo situarse el estilo en su parte inferior en el solsticio de invierno (21 de diciembre).

La distancia al estilo será: $OV = R \tan \varepsilon / \sin \varphi$ y la longitud mínima VL (VB) del estilo se calcula, de forma semejante al caso anterior [ley de los senos, que se utiliza en éste y en otros más adelante], por la expresión: $(R / \cos \varepsilon) / \sin \varphi = VL / \sin(180 - \varepsilon - \varphi)$. Por tanto: $VL = R \sin(\varphi + \varepsilon) / \sin \varphi \cos \varepsilon = R(1 + \tan \varepsilon / \tan \varphi)$.

Existe una similitud en el trazado con el anterior reloj y se comporta de la misma manera. La diferencia estriba en las horas de insolación, en las que, como todo reloj vertical que mire al Sur, las horas máximas serán 12, desde las 6 a las 18 h.

Para adaptarlo a otra latitud mayor será necesario llevarlo hacia nosotros de la parte superior del cuadrante un ángulo igual a la diferencia entre las dos latitudes. Si la latitud del lugar es menor, lo empujaremos de la parte superior hacia delante una cantidad equivalente al ángulo de la diferencia de latitudes.

Naturalmente, como en el caso anterior, la iluminación cambiará por dos motivos: la iluminación está en función de la latitud y además, el plano de proyección ahora no es vertical sino **reclinante** o **inclinado**.

La obtención de los puntos horarios es la misma que en el cuadrante anterior, utilizando la función: $OX = R \sin H$. Podemos agregar que se podría dejar fijo el estilo y hacer un trazado reticular como en el caso A1, ya descrito.

Este cuadrante se obtendría indirectamente basándose en la **equivalencia de planos**, por la cual todo plano inclinado y declinante tiene su **equivalente horizontal** en un punto de la Tierra de latitud φ' conforme a la fórmula: $\sin \varphi' = \cos i \sin \varphi - \sin i \cos \varphi \cos d$, siendo i la inclinación o pendiente y d la declinación del plano (no confundirla con la declinación δ del Sol).

Si hacemos que $i = 90$ y $d = 0$, esta fórmula se transforma en: $\sin \varphi' = \cos \varphi$ y por tanto: $\varphi' = 90 - \varphi = 49,6^\circ$. Así pues, todo se reduciría a trazar un reloj lineal horizontal para una latitud de $49,6^\circ$.

Teniendo en cuenta que está en el mismo meridiano pero en el hemisferio Sur, la progresión creciente de las horas en este nuevo punto austral lleva el sentido de las agujas del reloj. Al traerlo al punto de emplazamiento (Madrid) debe invertirse el sentido horario (contrario a las agujas del reloj). Lo mismo se actuará con respecto a los signos del zodiaco en la escala de las fechas, en la que habrá una inversión.

Este razonamiento se aplicará en aquellos casos en que la construcción gráfica sea poco demostrativa y habría que hacer varios abatimientos, por lo que la figura sería confusa y de difícil interpretación.

A-3) Cuadrante Foster-Lambert Norte Horizontal. La dirección de proyección (DP) es la bisectriz del ángulo $(90 - \varphi)$ formado por el Polo Norte (Pn) y el Zenit (Z). El plano de proyección elegido es el horizonte local. Fig. 5.

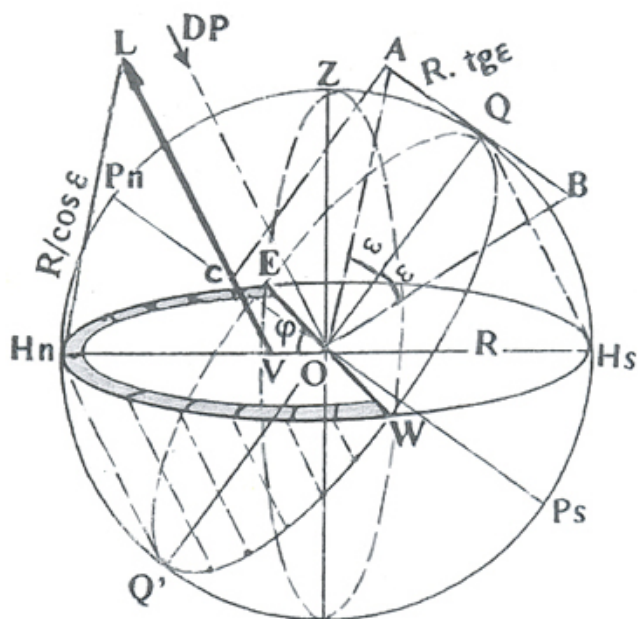
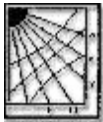


Figura 5. Cuadrante Foster-Lambert Norte Horizontal

Triángulo HnVL;
 $VL = R \cos(\varphi - \varepsilon) / \cos \varepsilon \sin((90 + \varphi)/2) = 8,04]$

Foster Lambert en un plano horizontal
 $R = 7\text{cm}$

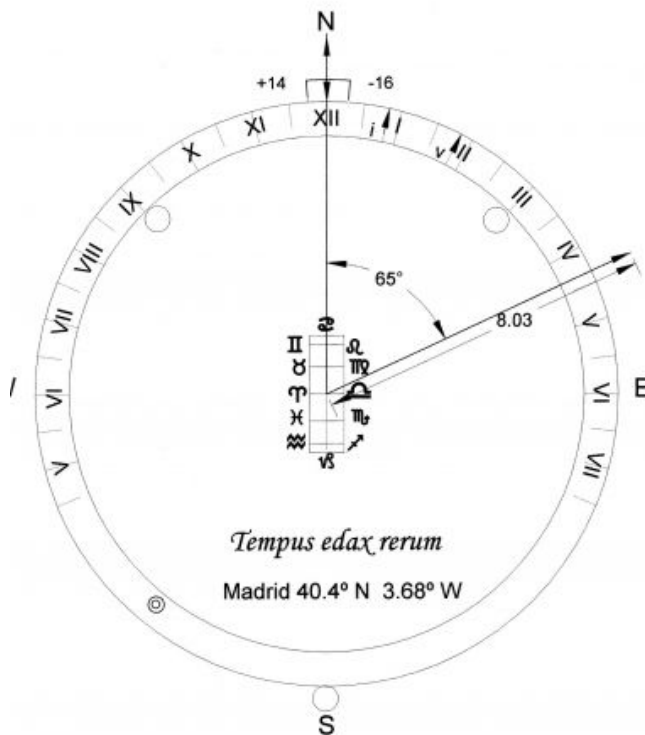


Figura 5b. Ejemplo de cuadrante de Foster-Lambert Norte Horizontal (calculado para Madrid)

[cálculos para la figura 5b:

$$i = (90 + \varphi)/2 = 65,2^\circ$$

Triángulo OVC;

$$OV = R \tan \varepsilon \tan((90 - \varphi)/2) = 1,4 \text{ cm}$$

$$\delta = 20,15^\circ = 1,18$$

$$\delta = 11,46^\circ = 0,65$$

Triángulo HnVL;

$$VL = R \cos(\varphi - \varepsilon) / \cos \varepsilon \sin((90 + \varphi)/2) = 8,3]$$

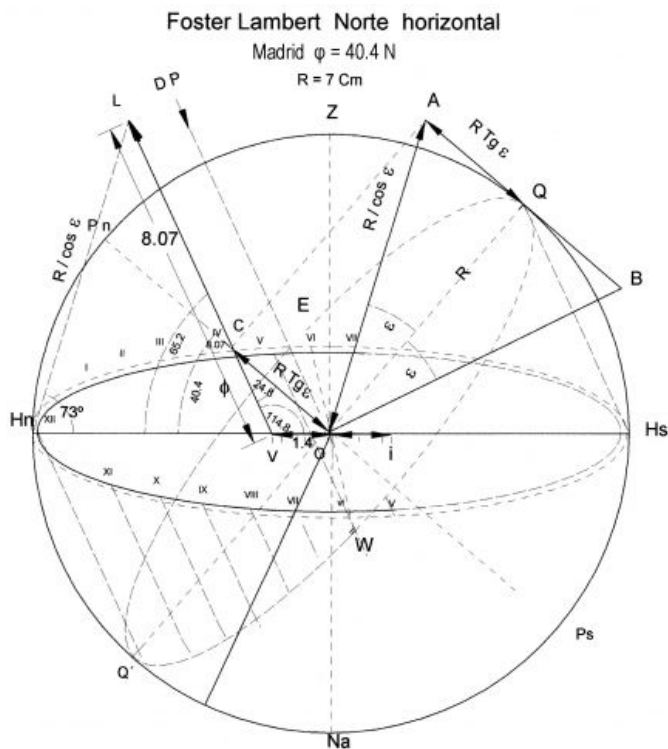


Figura 5 bis. Cuadrante de Foster-Lambert Norte Horizontal (calculado para Madrid)

[cálculos para la figura 5 bis:

$$i = (90 + \varphi)/2 = 65,2^\circ$$

Triángulo OVC;

$$OV = R \tan \varepsilon \tan((90 - \varphi)/2) = 1,4 \text{ cm}$$

$$\delta = 20,15^\circ = 1,18$$

$$\delta = 11,48^\circ = 0,65$$

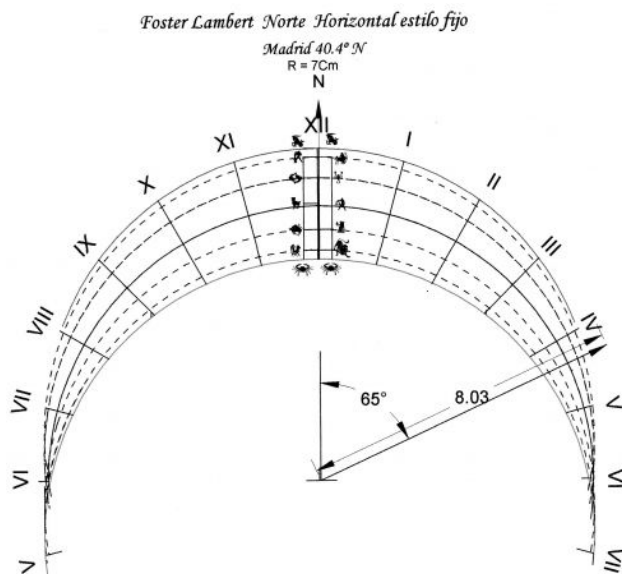
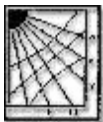


Figura 5c. Ejemplo de cuadrante Foster-Lambert Norte Horizontal con estilo fijo (calculado para Madrid)

Lo interesante de esta proyección es que el ecuador es homólogo a su proyección. Observemos que la línea Q-Hs es paralela al estilo, que es la dirección de proyección (DP), por lo que la figura proyectada sobre el horizonte local es el propio ecuador, esto es, el mismo círculo ecuatorial, según se aprecia en la figura. Por esta condición, las horas están separadas uniformemente de 15 en 15 grados y al ser homogéneas se facilita mucho la conversión de la hora solar a la hora oficial.

La distancia $OC = AQ = R \tan \varepsilon$ y el ángulo en C vale: $(90 - \varphi)/2$.
Por tanto: $OV/\sin(90 - \varphi)/2 = OC/\sin(180 - (90 + \varphi)/2)$.
La semi-escala valdrá: $OV = R \tan \varepsilon \tan(90 - \varphi)/2$.
En el triángulo HnVL, se tiene: $HnL = OA = R/\cos \varepsilon$. Por lo tanto: $OA/\sin(90 - \varphi)/2 = LV/\sin(90 - (\varphi - \varepsilon))$. Luego: $LV = R \cos(\varphi - \varepsilon)/\cos \varepsilon \sin(90 + \varphi)/2$.

Otra de las ventajas que conlleva este cuadrante es que capta las horas de iluminación máxima diurna para la latitud concebida y tiene una fácil ejecución.

A-4) Cuadrante Foster-Lambert en un plano vertical ortomeridiano. La dirección de proyección (DP) es la de la bisectriz del ángulo (φ) que el horizonte Sur (Hs) forma con el eje del mundo (Ps). Fig. 6.

También se cumple en este reloj que la proyección es homóloga con el ecuador.

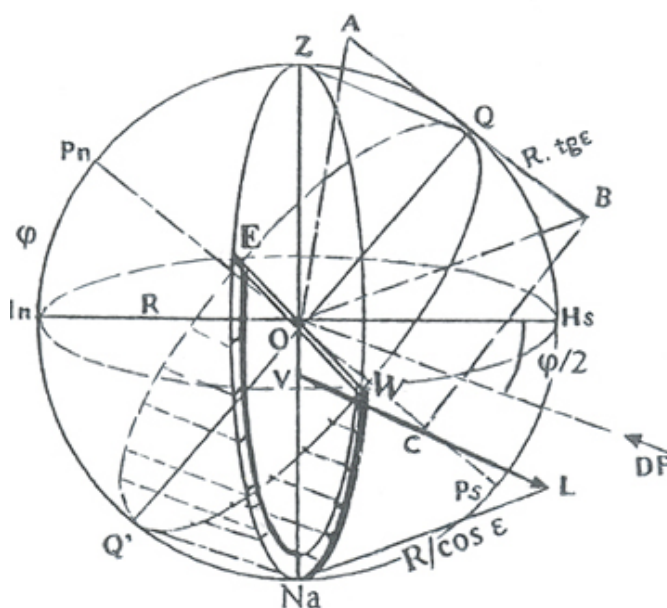


Figura 6. Cuadrante Foster-Lambert en un plano vertical ortomeridiano

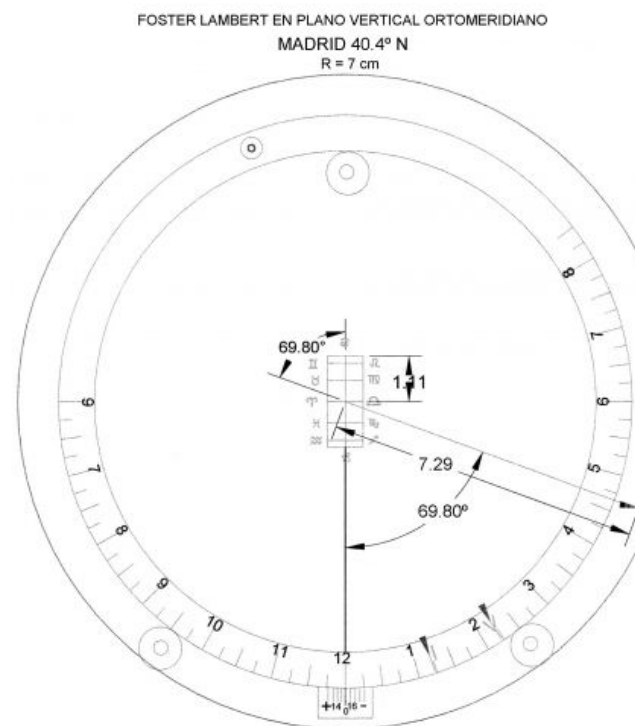
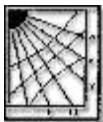


Figura 6b. Ejemplo de cuadrante Foster-Lambert en un plano vertical ortomeridiano (calculado para Madrid)

En la figura 6 se puede ver que la recta ZQ es paralela al estilo. Por ello, las líneas horarias del reloj ecuatorial se proyectan en el círculo vertical con idénticos ángulos.

Como en los casos anteriores, la distancia $OC = BQ = R \tan \varepsilon$. El ángulo en C vale $\varphi/2$ y el de V vale: $(90 +$



$\phi/2$). Por tanto: $OV/\sin \phi/2 = OC/\sin(90 + \phi/2)$.
La semi-escala valdrá: $OV = R \tan \epsilon \tan \phi/2$ y en el triángulo VLNa se tiene que: $VL/\sin(\phi + \epsilon) = NaL/\sin(90 - \phi/2 - \epsilon)$. El estilo será: $R \sin(\phi + \epsilon)/\cos \epsilon \cos \phi/2$.

Para más detalles, remitimos al lector al artículo "Un intrigante reloj", del boletín Analema (nº 7), en el que se trata el diseño de un reloj utilizando el método del plano **horizontal equivalente**, en otro punto del globo terrestre.

A-5) Cuadrante Foster-Lambert en un plano polar. La dirección de proyección hace un ángulo de 45° con el plano polar y el plano seleccionado es el mismo plano del eje del mundo. Fig. 7.

Al ser la dirección de proyección la bisectriz del ángulo formado por el eje del mundo y el ecuador, la homología se conserva, pues son dos planos perpendiculares entre sí y por lo tanto la proyección del ecuador será el propio ecuador.

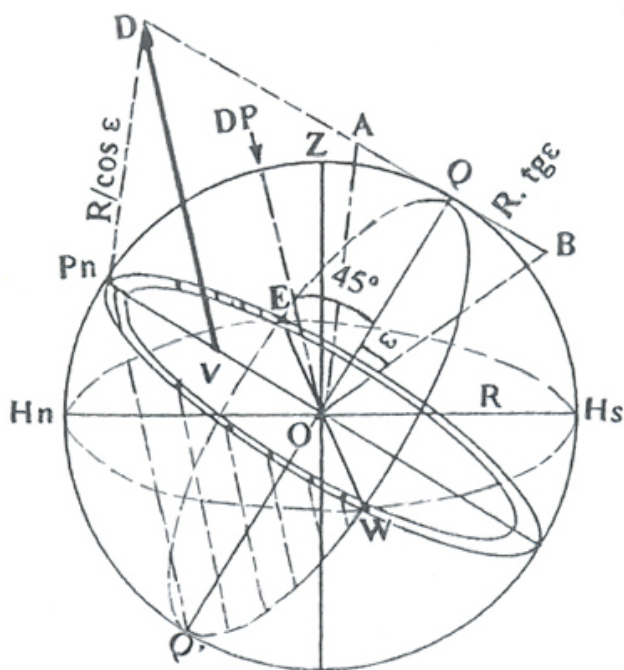


Figura 7. Cuadrante Foster-Lambert en un plano polar

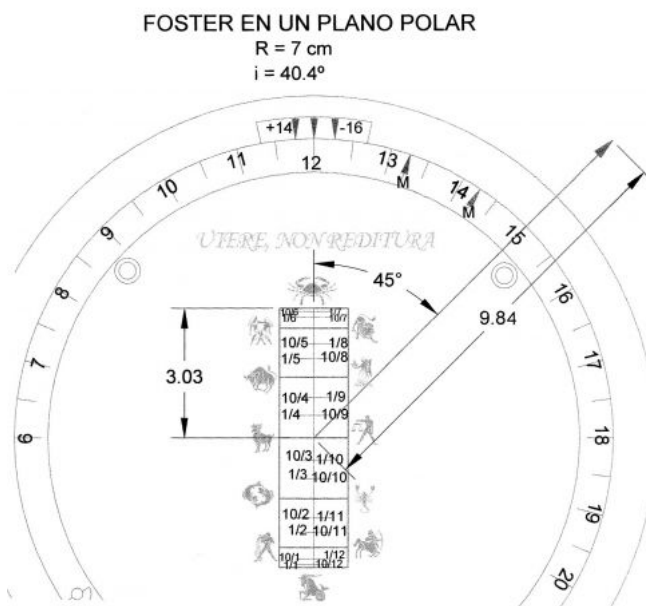


Figura 7b. Ejemplo de cuadrante de Foster-Lambert en un plano polar (calculado para Madrid)

La semi-escala Ef será: $OV = R \tan \epsilon$. La longitud del estilo se puede deducir de la expresión: $R(\cos \epsilon - \sin \epsilon)/\sin(45 - \epsilon)$ y por tanto, Lg valdrá: $VL = R/\sin 45$.

Tanto gráficamente como analíticamente el plano **horizontal equivalente**, estaría en el ecuador y en el mismo meridiano. Así pues, todo quedaría reducido a trazar un cuadrante Foster-Lambert horizontal en el ecuador (latitud: $\phi' = 0$). Para poderlo utilizar en nuestra latitud, habría que elevarlo de la parte norte un ángulo igual a ϕ .

Nada nos impide diseñar un Foster-Lambert en el ecuador, pero para el hemisferio Sur. Es evidente que será simétrico especular al trazado con respecto al del hemisferio Norte, con lo que el cuadrante tendrá dos estilos perpendiculares entre sí y una circunferencia única; su mitad norte con la inscripción de las horas en el sentido horario y la mitad sur con la inscripción en el sentido antihorario. Ver figura 8.



Figura 8. Doble cuadrante Foster-Lambert en un plano polar

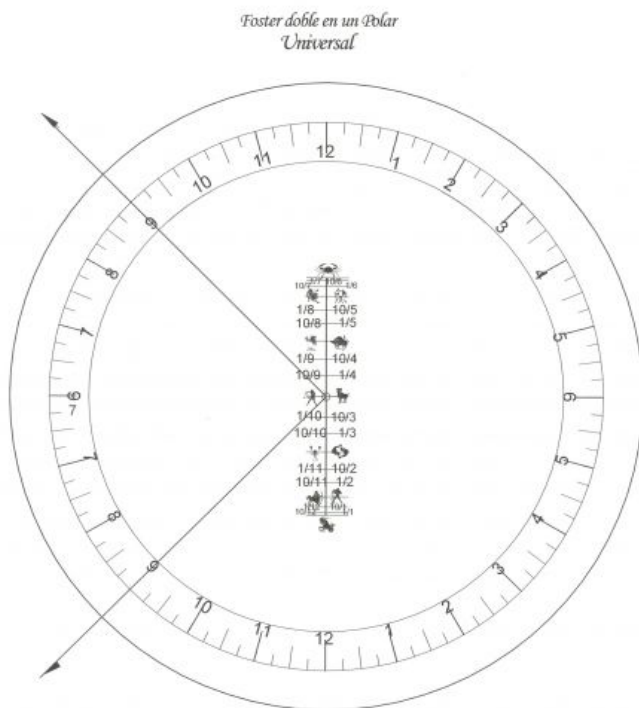
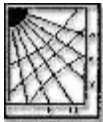


Figura 8b. Ejemplo de doble cuadrante Foster-Lambert en un plano polar. Una de sus ventajas es el carácter universal que tiene, ya que se le puede dotar un sistema para su adaptación (inclinación) a cualquier latitud. La sombra de la parte superior recorrerá el dial en el sentido de las agujas del reloj, la parte inferior en el sentido contrario.

El motivo de dotarlo de dos estilos es sólo por razón estética, porque gana en armonía.

Como el máximo de iluminación es de 12 horas, si se quieren captar las anteriores a las 6 o las posteriores a las 18, sólo sería necesario prolongar los estilos por la parte que mira al Nadir y numerar las horas en la cara inferior del cuadrante. La escala es única y la entrada de los signos es la misma.

Una de sus ventajas es el carácter universal que tiene este cuadrante, al que se le puede dotar un sistema para su adaptación a cualquier latitud.

A-6) Cuadrante equiangular de Gordon [Gordon E. Taylor]. La dirección de proyección (DP) es perpendicular al horizonte local y el plano de proyección (DP) forma un ángulo de (φ) con la vertical. Fig. 9.

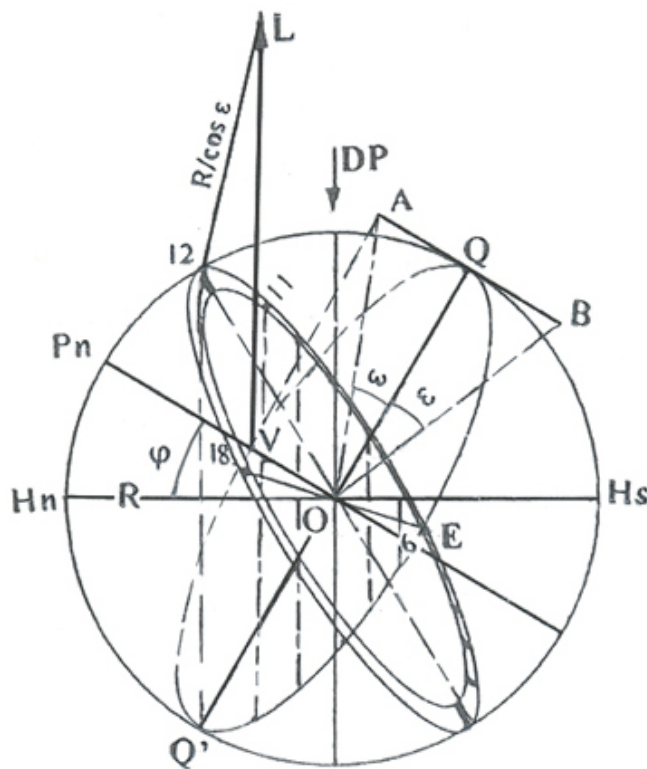


Figura 9. Cuadrante equiangular de Gordon

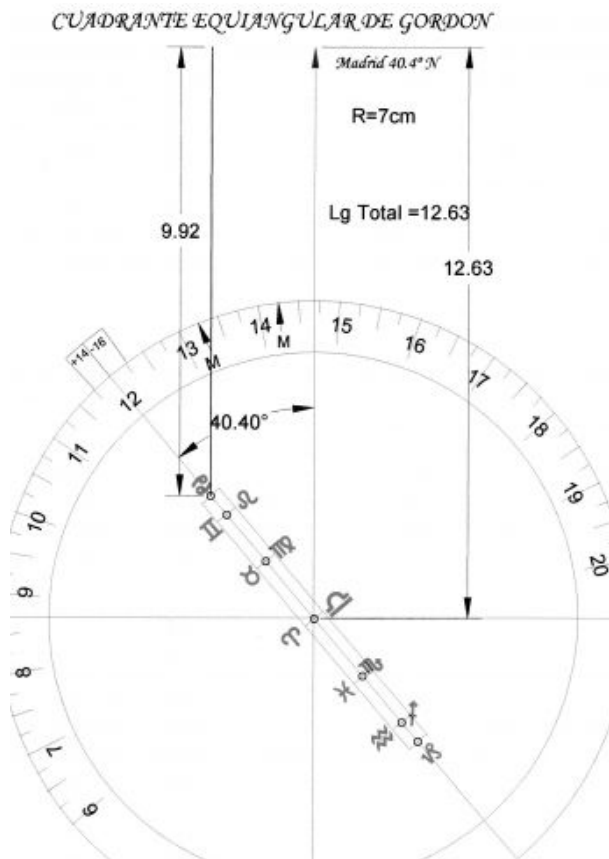
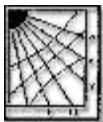


Figura 9b. Ejemplo de cuadrante equiangular de Gordon (calculado para Madrid)



Existe simetría entre el plano ecuatorial y el de proyección, pues lo son con relación a la vertical Z-O. Por tanto, las marcas de las horas están separadas 15 grados entre sí.

De forma semejante a los casos anteriores, la semi-escala de fechas Ef se obtiene por: $OV/\sin(90 + \varphi) = R \tan \varepsilon/\sin \varphi$; $OV = R \tan \varepsilon/\tan \varphi$, y la longitud del estilo LV valdrá: $R \sin(2\varphi - \varepsilon)/\cos \varepsilon \sin \varphi$.

Es interesante conocer las horas de iluminación máxima en este cuadrante. Por ejemplo: en un punto de latitud $40,4^\circ$ (Madrid) el día 21 de junio para inscribirlas en el cuadrante de una forma adecuada.

El cálculo sería el siguiente. El ángulo horario para ese día del solsticio de verano, en el orto y en el ocaso, será: $H = -\tan \varphi \tan \varepsilon$. Luego $H = 111,65^\circ = 7,44 \text{ h} = 7:26:36 \text{ h}$. La hora del orto en Madrid será: $12 - 7:26:36 = 4:33:24$ y para el ocaso: $19:26:36$.

Para el plano escogido, de inclinación $49,6^\circ$, es equivalente a uno horizontal en un punto del hemisferio cuya latitud φ' es igual a la diferencia entre la inclinación y la latitud ($9,2^\circ \text{ S}$). El ángulo horario para el orto-ocaso, en ese día ($\delta = 23,44$, $\varphi' = 9,2^\circ \text{ S}$) será: $\cos H = \tan 23,44 \tan 9,2$; $H = 85,97^\circ = 5:43:53 \text{ h}$, luego el orto será a las: $12 - 5:43:53 = 6:16:07$; momento preciso en que empezará a iluminarse el plano elegido y terminará la iluminación cuando se produzca el ocaso en el cuadrante horizontal, situado en el punto de latitud $9,2^\circ \text{ S}$ a las: $12 \text{ h} + 5:43:53 \text{ h} = 17:43:53 \text{ h}$.

Se podría adaptar a otra latitud como en casos anteriores, aunque es evidente que el estilo no permanecería perpendicular al nuevo horizonte y la iluminación sería diferente.

A-7) Foster-Lambert Sur Horizontal. La dirección de proyección (DP) coincide con la bisectriz del ángulo $(90 - \varphi)$ formado por el ecuador y el horizonte. El plano de proyección (PP) es el horizonte. Fig. 10.

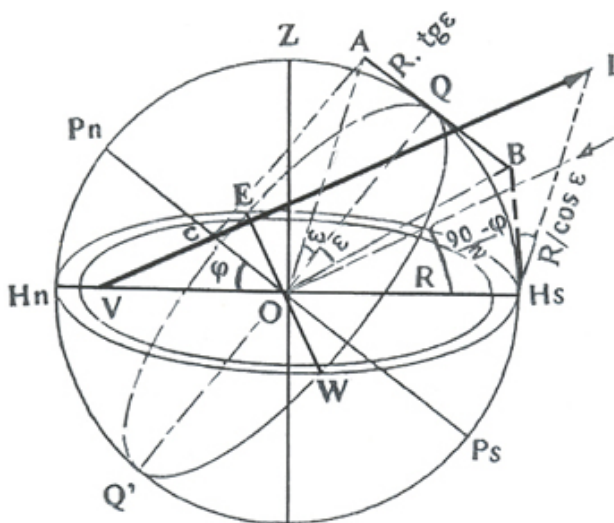


Figura 10. Cuadrante de Foster-Lambert Sur Horizontal

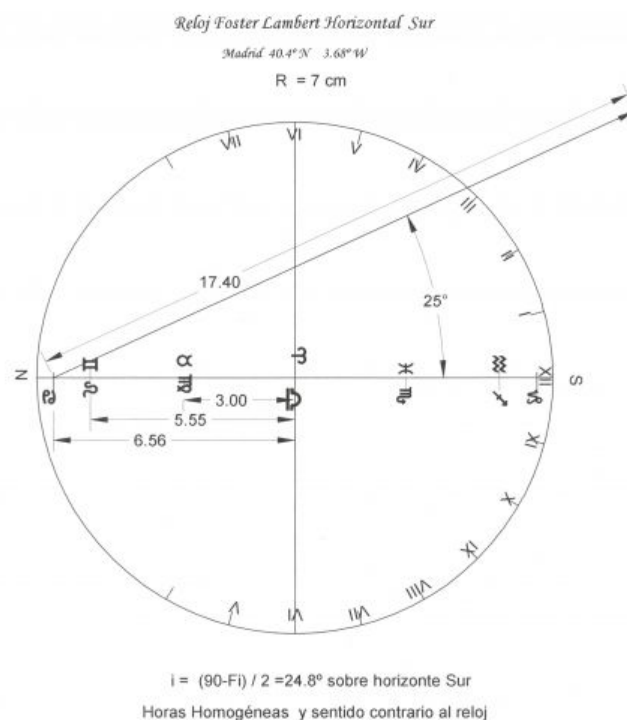


Figura 10b. Ejemplo de Cuadrante Foster-Lambert Sur Horizontal (calculado para Madrid)

Según se puede ver en la figura, la escala de desplazamiento es muy grande comparada con el radio R, y la longitud del estilo es casi dos veces y media la del radio, lo que le da un aspecto estéticamente poco atractivo. Sin embargo, combinado con otros relojes y mediante un artificio, puede ser más armónico.

Los planos del reloj ecuatorial (OQ) y el del horizonte (OHs) son simétricos con relación a la línea O-DP, por tanto, las rectas horarias de este reloj también distarán 15° entre sí.

En el triángulo OCV, se tiene: $OC/\sin(90 - \varphi)/2 = OV/\sin(180 - (90 + \varphi)/2)$. Luego la semi-escala Ef valdrá: $OV = R \tan \varepsilon/\tan(90 - \varphi)/2$. En el triángulo VLHs se tiene: $LHs/\sin(90 - \varphi)/2 = VL/\sin(90 + \varphi - \varepsilon)$. La longitud Lg del estilo será: $VL = R \cos(\varphi - \varepsilon)/\cos \varepsilon \sin(90 - \varphi)/2$.

También se puede situar otro estilo, perpendicular al anterior orientado hacia el Norte en vez de al Sur y que esté situado en el mismo punto V.

A-8) Reloj analemático de Vaulezard [conocido como "analemático"]. La dirección de proyección (DP) es la del Zenit (Z) perpendicular al horizonte, que es el plano de proyección (PP). Fig. 11.

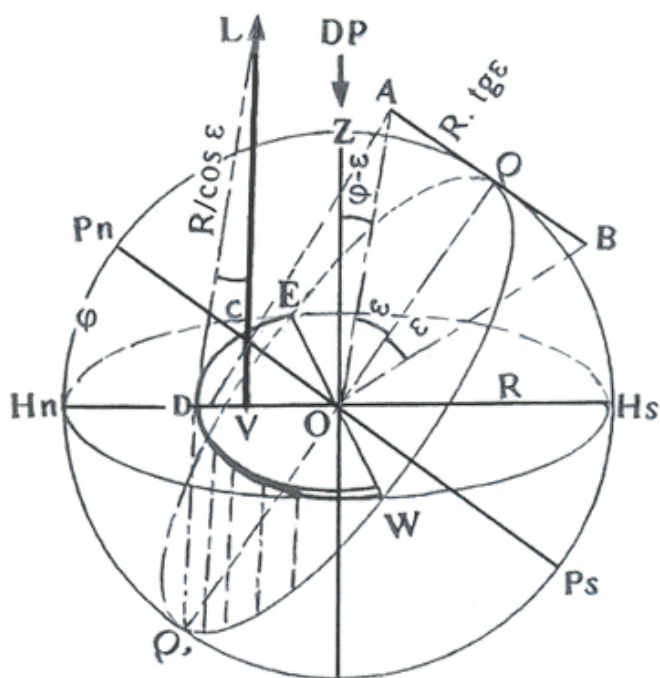
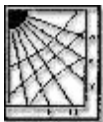


Figura 11. Reloj analemático de Vaulezard

RELOJ ANALEMÁTICO DE VAULEZARD

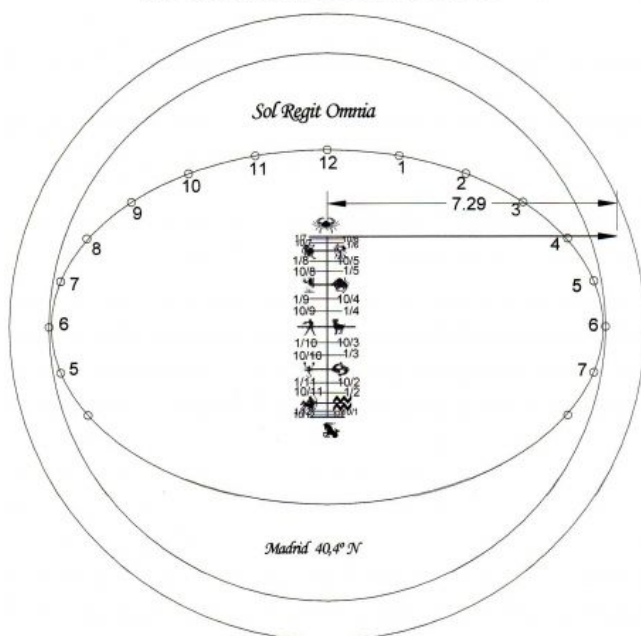


Figura 11b. Ejemplo de reloj analemático de Vaulezard (calculado para Madrid)

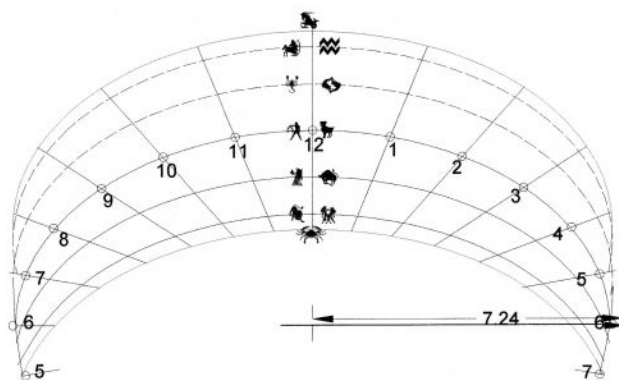


Figura 11c. Ejemplo de reloj de Vaulezard horizontal de gnomon fijo (calculado para Madrid)

El círculo ecuatorial QQ' proyectado se transforma en una elipse cuyo eje menor será: $OD = R \sin \varphi$, según se muestra en la figura. Los puntos horarios se inscriben en la elipse, según el acimut real (ac) en los equinoccios: $\tan ac = \tan H / \sin \varphi$.

La semi-escala $OV = R \tan \varepsilon \cos \varphi$. La longitud L_g del estilo será: $VL = R \cos (\varphi - \varepsilon) / \cos \varepsilon$. Justificamos este ejemplo, pues creemos que todos los libros modernos incluyen un estudio de este cuadrante.

A-9) Foster-Lambert Norte y Sur, combinado con el analemático de Vaulezard en plano horizontal. Reloj combinado, agregando al anterior dos cuadrantes del tipo Foster-Lambert (párrafos A-3 y A-7). Fig. 12.

La característica principal es la de ser auto-orientable porque tiene dos sistemas diferentes de medir la hora. Por otra parte, como se ha comentado antes, el cuadrante Foster-Lambert Sur le hace más estético y agradable a la vista.

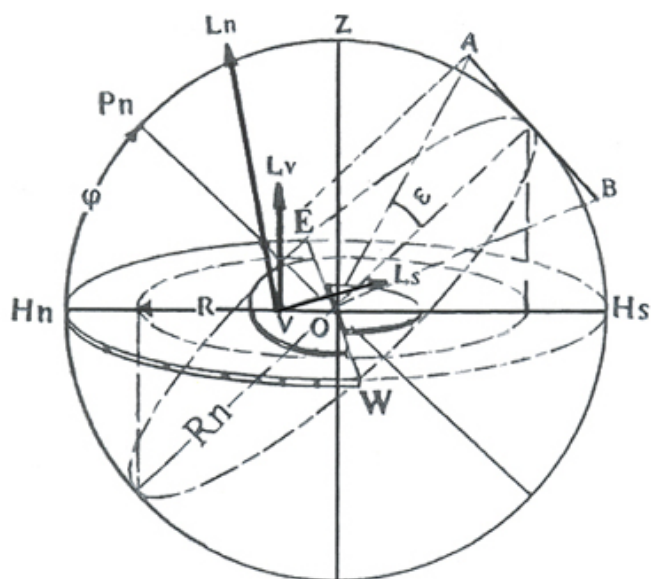
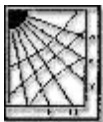


Figura 12. Cuadrante Foster-Lambert, Norte y Sur, combinado con el analemático de Vaulezard

Si se igualan las longitudes de las escalas, lógicamente tienen que variar los radios R_n y R_s de los otros círculos. Se calculan en función de R . $E_f = R_n \tan \varepsilon$
 $\tan(90 - \varphi)/2 = R_s \tan \varepsilon \tan(90 + \varphi)/2$.

Los puntos horarios de ambos Foster-Lambert, como se ha visto, son homogéneos, separados igualmente cada 15° , según muestra la figura 12.

A-10) Cuadrante de Vaulezard en un plano vertical ortomeridiano. La dirección de proyección (DP) es perpendicular al plano vertical de proyección. Fig. 13.

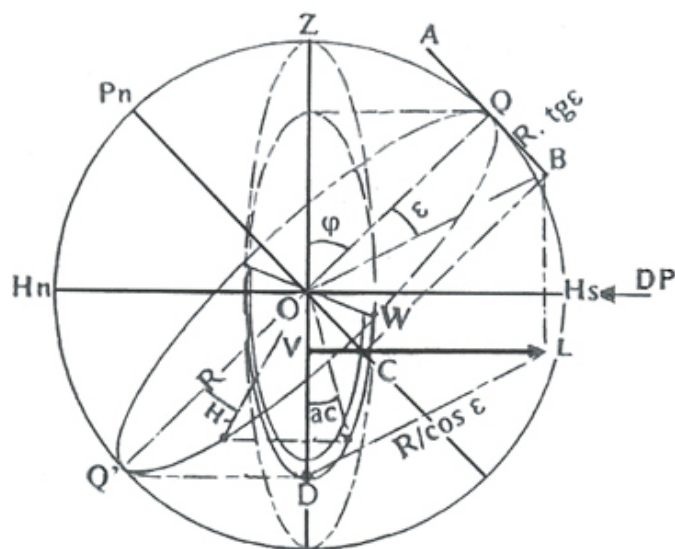


Figura 13. Cuadrante de Vaulezard en un plano vertical ortomeridiano

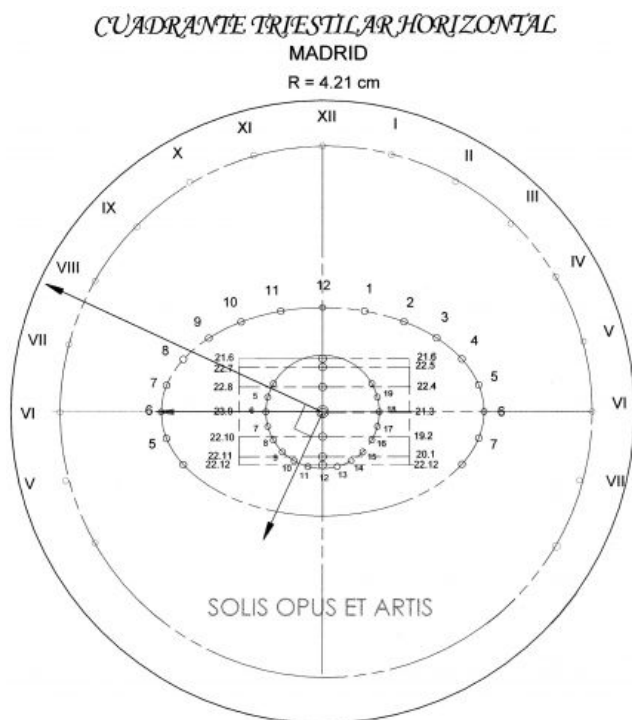
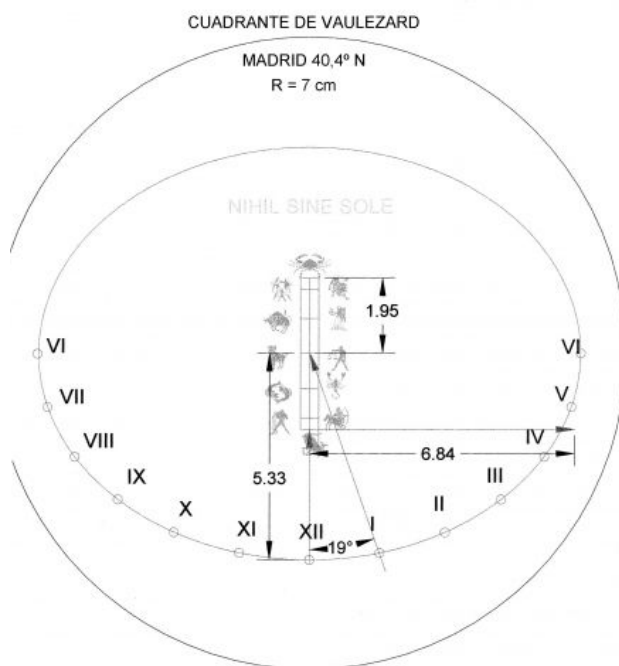


Figura 12b. Ejemplo de Cuadrante Foster-Lambert Norte y Sur, combinado con el analemático de Vaulezard en un plano horizontal (calculado para Madrid)

Partimos del supuesto que el radio R de referencia es el del analemático de Vaulezard. Los tres relojes han de tener una escala única y la misma entrada de los signos del zodiaco, siendo el valor del analemático igual a: $E_f = R \tan \varepsilon \cos \varphi$.



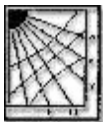


Figura 13b. Ejemplo de cuadrante de Vaulezard en un plano vertical ortomeridiano (calculado para Madrid)

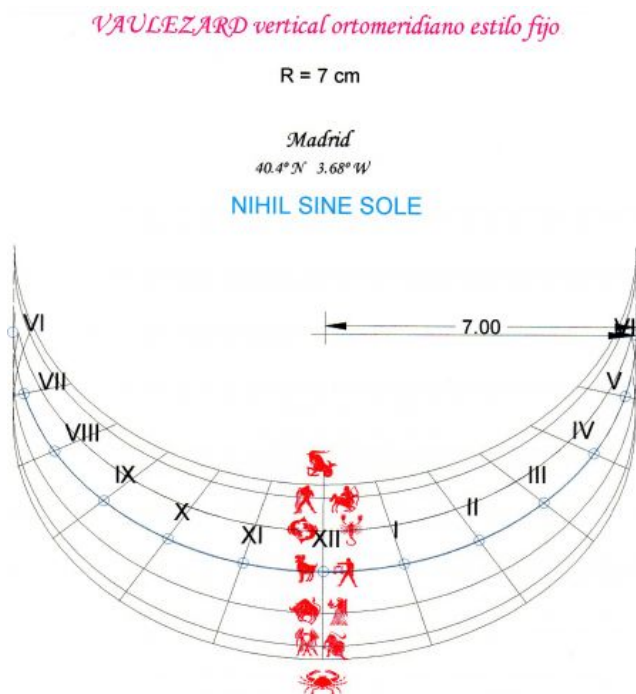


Figura 13c. Ejemplo de reloj de Vaulezard vertical de gnomon fijo (calculado para Madrid)

El cuadrante ecuatorial al proyectarse sobre el plano vertical genera una elipse, cuyo eje menor es $OD = R \cos \phi$, sobre la que estarán las marcas horarias ($\tan \alpha c = \tan H / \cos \phi$).

La semi-escala Ef se deduce de la figura siendo: $OV = QB \sin \phi = R \tan \epsilon \sin \phi$, y $OD = R \cos \phi$. En el triángulo VLD , la longitud del estilo Lg será: $VL = R \sin(\phi + \epsilon) / \cos \epsilon$.

Se llega a los mismos resultados, si consideramos la equivalencia de los planos y se trazan en el punto equivalente, un cuadrante de Vaulezard horizontal, que al colocarlo en el punto de latitud habría que invertir el sentido de rotación de las horas y la entrada de los signos del zodiaco. El número de las horas está limitado al intervalo de las 6 a las 18.

A-11) Cuadrantes Foster-Lambert combinados en un plano vertical ortomeridiano. Se trata de la combinación de dos cuadrantes cuyos estilos son perpendiculares. Fig. 14.

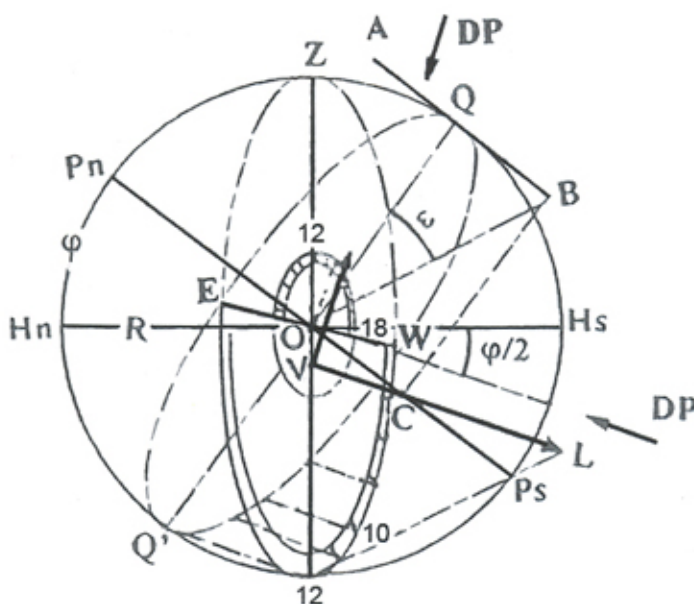


Figura 14. Cuadrantes Foster-Lambert combinados en un plano vertical ortomeridiano

Foster Lambert Norte y Sur vertical ortomeridiano

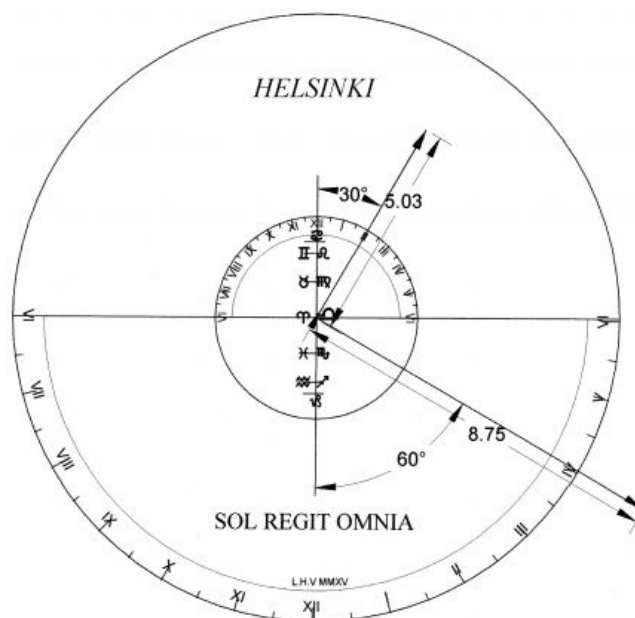
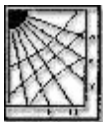


Figura 14b. Ejemplo de cuadrantes Foster-Lambert combinados en un plano vertical ortomeridiano (calculado para Helsinki). No se ha realizado el cálculo para Madrid ya que para hacerlo la altura máxima del Sol el 21 de junio debe de ser menor que $90 - (\phi/2)$, circunstancia que se verifica a partir de los 48° de latitud.

En el párrafo A-4 se describió un cuadrante cuya semi-escala es $OV = R \tan \epsilon \tan \phi/2$. Ahora se trata de añadir en el punto V otro estilo con una dirección (DP)



perpendicular, que formará con la vertical un ángulo de $\varphi/2$. Para este nuevo estilo el radio será distinto porque: $OV = R' \tan \varepsilon / \tan \varphi/2$, la razón entre radios será: $R' = R \tan^2 \varphi/2$.

Lg del estilo inferior: $R \sin(\varphi + \varepsilon) / \cos \varepsilon \cos \varphi/2$. Lg del estilo superior: $R \sin(\varphi + \varepsilon) / \cos \varepsilon \sin \varphi/2$.

Si se ha incluido esta combinación es por explorar todas las posibilidades y por puro "divertimento", pues en realidad no presenta ninguna ventaja sobre los casos anteriores.

A-12) Reloj triestelar, combinación de dos Foster-Lambert, Norte y Sur, con un analemático de Vaulezard, en un plano polar. Fig. 15.

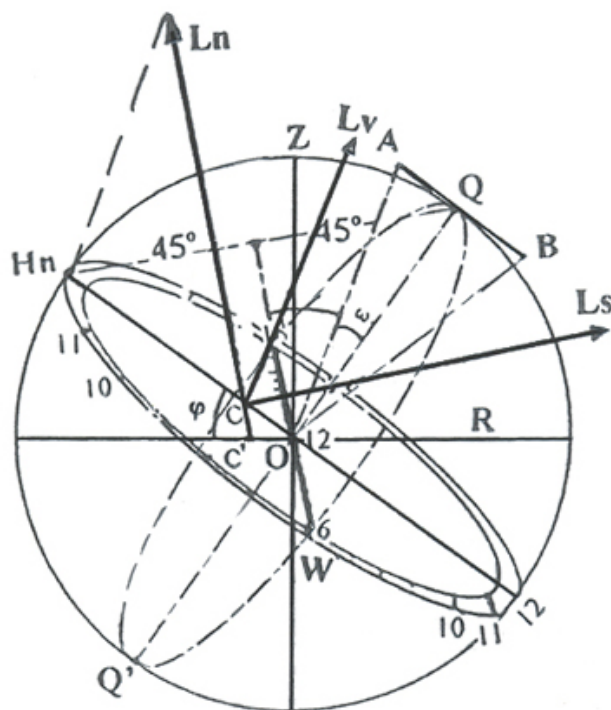


Figura 15. Reloj triestelar, combinación de dos Foster-Lambert, Norte y Sur, con un analemático de Vaulezard en un plano polar

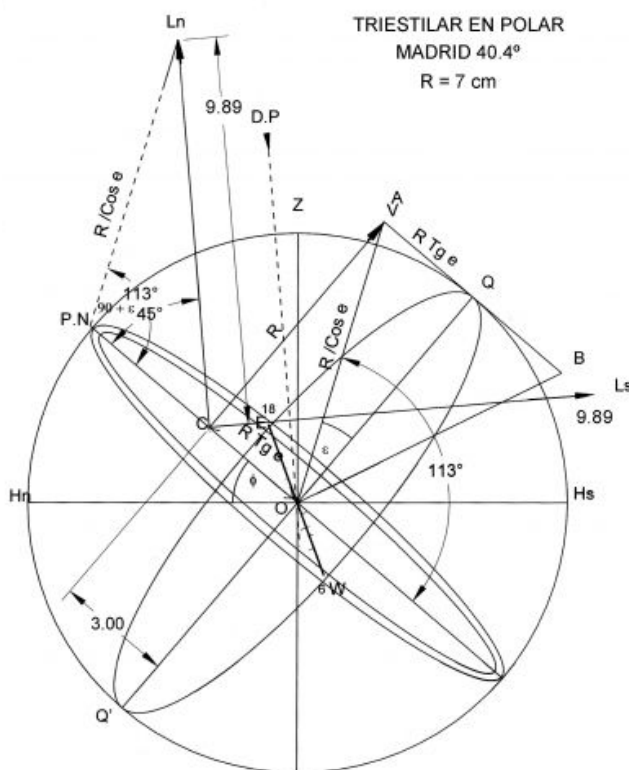
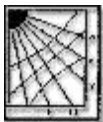


Figura 15 bis. Reloj triestelar, combinación de dos Foster-Lambert, Norte y Sur, con un analemático de Vaulezard en un plano polar (calculado para Madrid)



Foster-Lambert Norte y Sur combinado con un analematico en un plano Polar

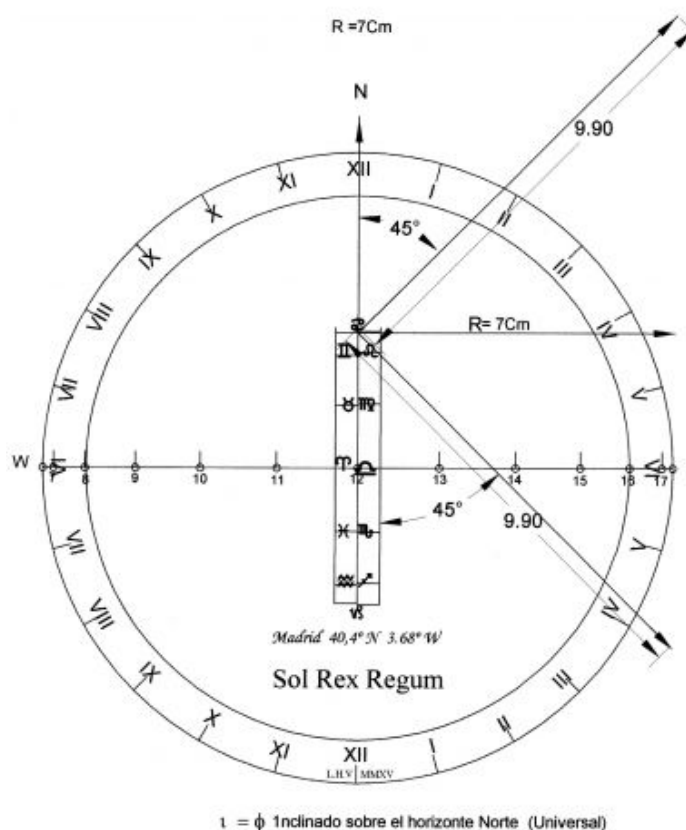


Figura 15b. Ejemplo de Cuadrante Foster-Lambert, Norte y Sur, combinado con el analemático de Vaulezard (calculado para Madrid)

Si el cuadrante anterior sólo consistía en un ejercicio matemático, éste ofrece ventajas sustanciales. Como es un reloj auto-orientable, no precisa brújula, porque tiene dos sistemas distintos de medida del tiempo. Cuando ambos relojes, analemático y Foster-Lambert, señalen la misma hora es que estarán automáticamente orientados.

También es universal, al ser adaptable a cualquier latitud, es de gran sencillez en su trazado que queda reducido a una circunferencia y dos líneas y por si fuera poco, permite la facilidad de convertir la hora solar en hora oficial, pudiendo coincidir ambas en el cuadrante. Todas estas características le confieren su carácter práctico.

En el apartado A-5 se ha hecho referencia a los Foster-Lambert en un plano polar. Se comentó entonces que: un plano cuya inclinación sea ϕ , tiene otro plano equivalente horizontal en el ecuador, en el que $\phi' = 0$.

Si trazamos un cuadrante analemático de Vaulezard (A-8) en el ecuador, la elipse (proyección ortogonal del ecuador) se convierte en una recta E-W, sobre la cual van inscritas las horas. Fig. 16.

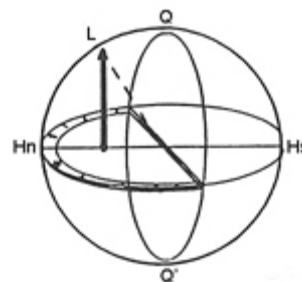


Figura 16. Cuadrante analemático de Vaulezard en el ecuador

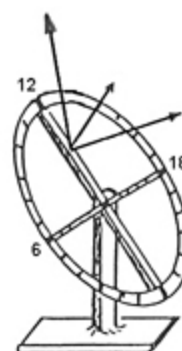


Figura 17. Ejemplo de cuadrante analemático de Vaulezard en el ecuador

La semi-escala de fechas es común a ambos relojes ($R \tan \epsilon$) y con las mismas entradas de los signos del zodiaco.

Las horas estarán inscritas en el eje mayor y la separación tendrá el valor de $R \sin H$, siendo H el ángulo horario, a ambos lados de la línea de las 12 horas. Fig. 17.

A-13) Cuadrante elíptico horizontal. La dirección de proyección (DP) es la del eje del mundo y el plano seleccionado es el horizonte local. Fig. 18.

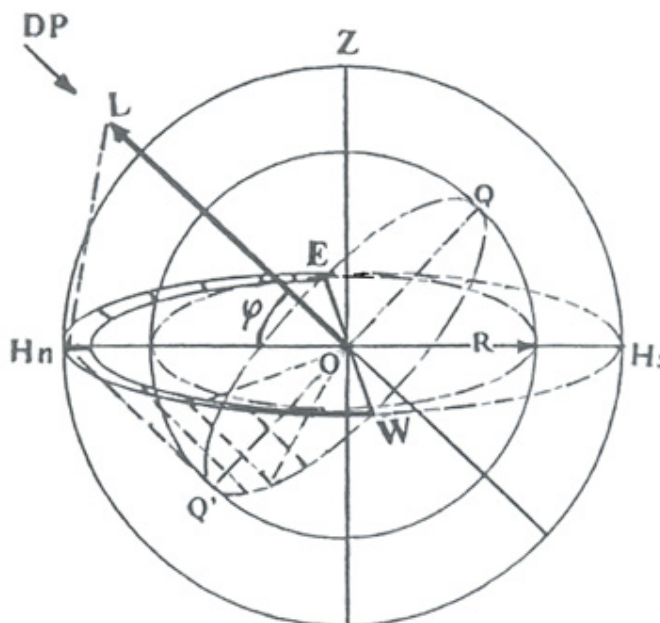
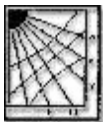


Figura 18. Cuadrante elíptico horizontal

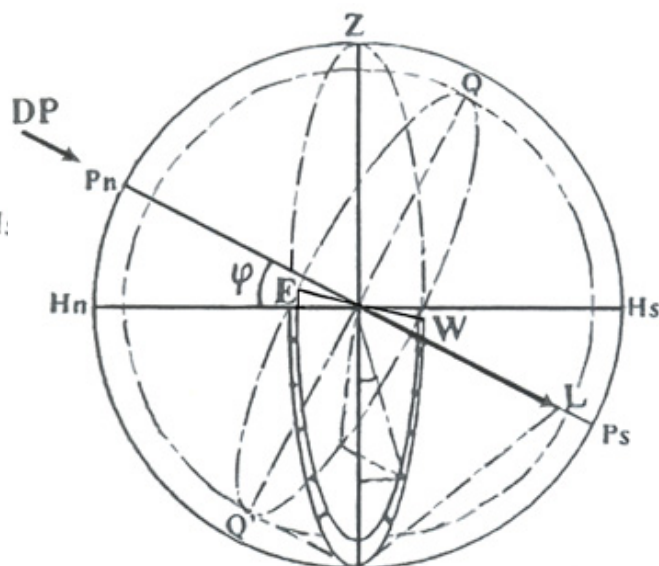


Figura 19. Cuadrante elíptico vertical ortomeridiano

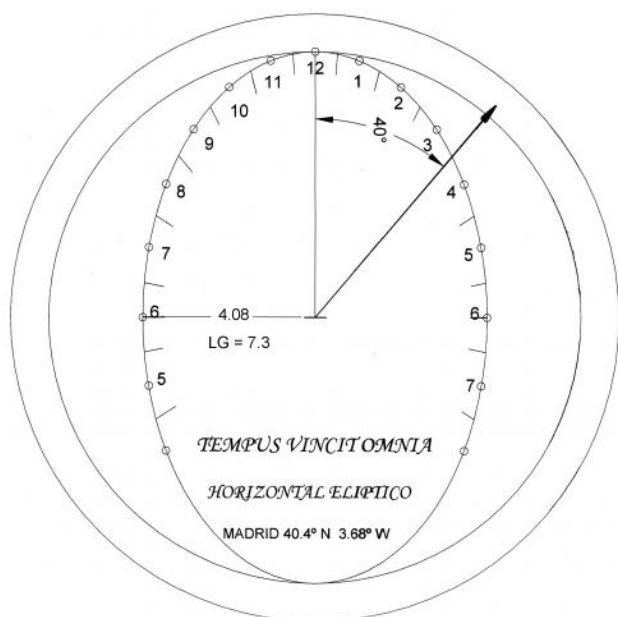


Figura 18b. Ejemplo de cuadrante elíptico horizontal (calculado para Madrid)

Los puntos horarios se inscriben sobre una elipse, cuyo semi-eje mayor vale: $R/\sin \varphi$ y el menor R . La longitud del estilo fijo es: $LO = R \cos(\varphi - \varepsilon)/\cos \varepsilon \sin \varphi$.

Se diferencia del reloj horizontal direccional a estilo polar en que las marcas de las horas están sobre una elipse y que carece de líneas horarias, que partiendo de los puntos horarios van a confluir en el polo del reloj. Las horas se marcan sobre la elipse según coordenadas cartesianas donde: $x = R \sin H$, $y = R \cos H/\sin \varphi$.

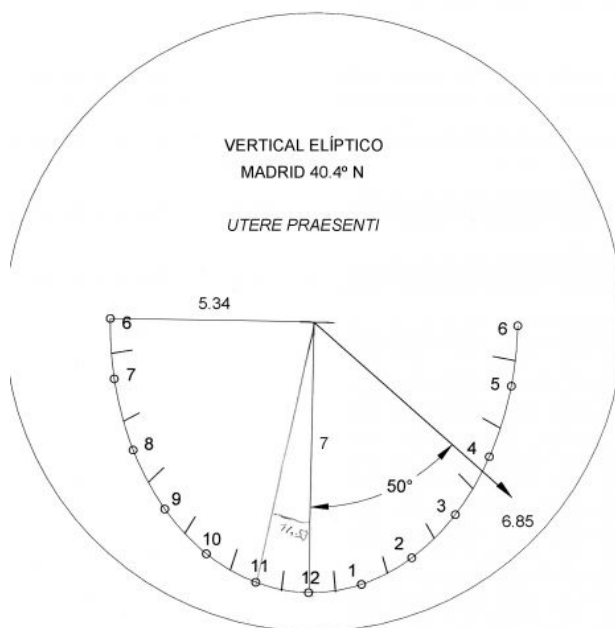
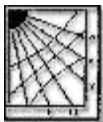


Figura 19b. Ejemplo de cuadrante elíptico vertical (calculado para Madrid)

Lg del estilo: $LO = R \sin(\varphi + \varepsilon)/\cos \varepsilon \cos \varphi$. Semi-eje mayor: $R/\cos \varphi$. Las horas se marcan sobre la elipse según coordenadas cartesianas donde: $x = R \sin H$, $y = R \cos H/\cos \varphi$.



CUADRANTES DEL GRUPO B

Relojes derivados de uno ecuatorial, proyectados según una dirección de proyección (DP) que está **fuera** del plano meridiano.

B-1) Cuadrante de Parent, combinado de un analemático en el ecuador con un oriental-occidental a estilo polar. La dirección de proyección (DP) es ortogonal al plano meridiano, que es su plano de proyección (PP). Fig. 20.

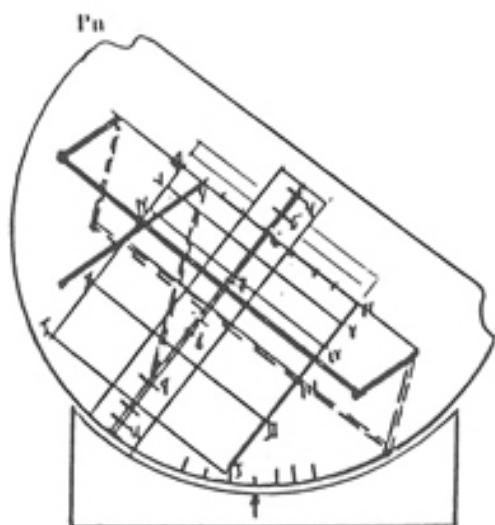


Figura 20. Cuadrante de Parent, combinado de analemático con oriental-occidental

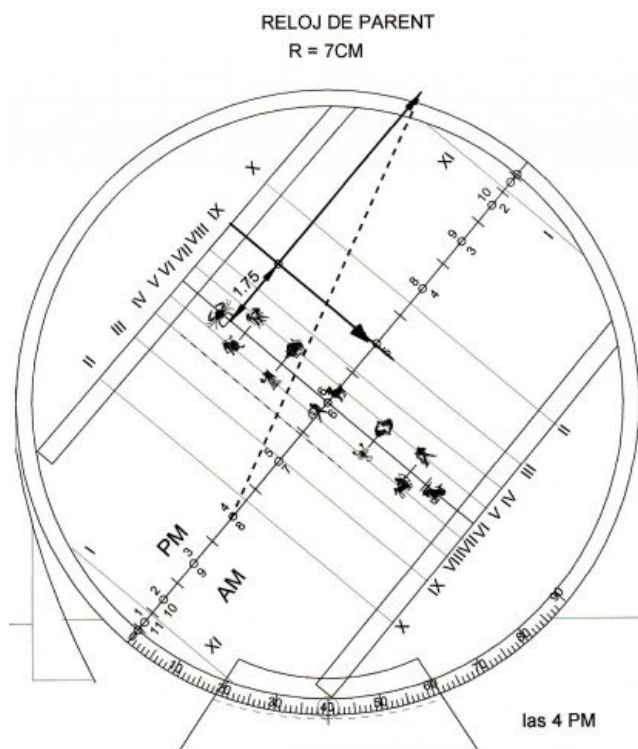


Figura 20b. Ejemplo de cuadrante de Parent, combinado de analemático con oriental-occidental (calculado para Madrid)

Intuitivamente se aprecia que, todo plano vertical meridiano tiene su equivalente horizontal en el ecuador ($\phi' = 0$). La longitud λ' difiere en 90° , equivalente a 6 horas, por cada cara.

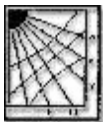
El plano vertical meridiano de Madrid tiene dos puntos en el ecuador en los que hay un equivalente horizontal. La cara oriental tiene su equivalente horizontal en Ceilán, $\phi' = 0$, y λ' con 6 horas más que Madrid. La cara occidental tiene su equivalente horizontal en las Islas Galápagos, $\phi' = 0$, y λ' con 6 horas de diferencia con Madrid.

Si trazamos un analemático de Vaulezard en el ecuador como el del apartado A-12 y le giramos un ángulo ϕ , los planos de ambos relojes quedarán superpuestos, como si estuvieran calcados.

El reloj de Parent tiene el inconveniente de que no se marcan las horas en los equinoccios, porque la sombra del estilo cae a lo largo de la línea horaria. Para evitar esto, se le ha agregado un reloj direccional, que además le hace auto-orientable, lo que le hace comportarse como una auténtica brújula solar, orientándonos en el espacio y el tiempo.

Si se le dota de una escala circular de latitudes, como se muestra en la figura 20, se puede comportar como universal y por disponer de dos caras simétricas es capaz de señalar todas las horas de insolación.

El único inconveniente que presenta el conjunto es la dificultad de lectura en las horas centrales del día, como se aprecia en la figura.



B-2) Cuadrante Foster-Lambert combinado con un direccional oriental-occidental a estilo polar en el plano meridiano. La dirección de proyección (DP) es perpendicular al plano meridiano y el plano de proyección (PP) es el propio meridiano. Fig. 21.

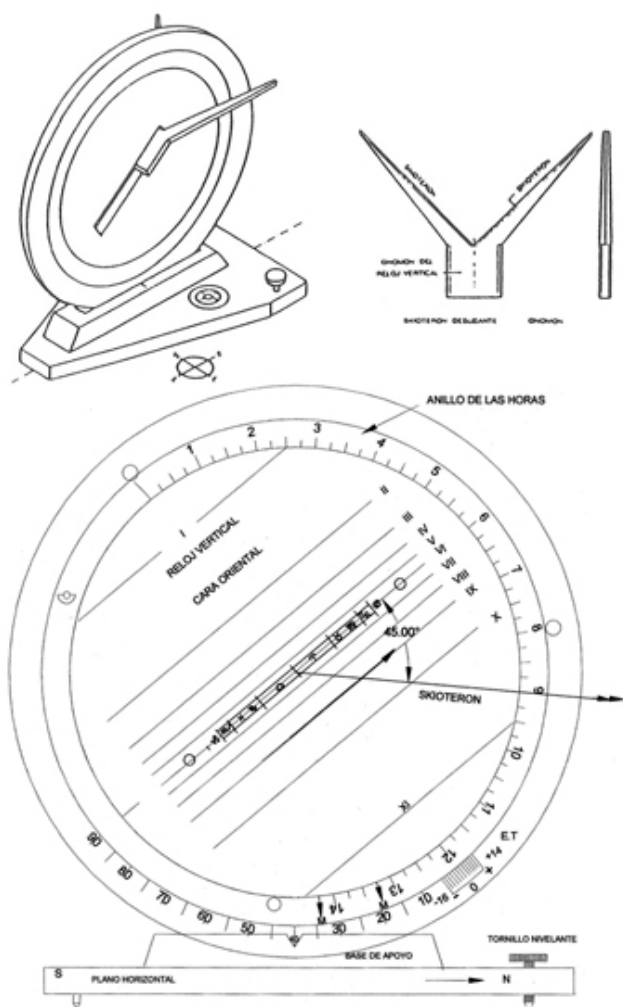


Figura 21. Cuadrante Foster-Lambert combinado con direccional oriental-occidental



Figura 21b. Reloj de sol Foster-Lambert combinado con un direccional oriental-occidental (diseño de Luis Hidalgo, fotografía de Manuel Núñez)

Para el cálculo debemos seguir el mismo razonamiento anterior, con la salvedad de que en vez de diseñar un analemático, se hará un Foster-Lambert, con lo que habrá desaparecido la dificultad de lectura de las horas centrales, puesto que los puntos horarios están sobre un círculo y separados por ángulos iguales de 15° . Además, al ser homogéneas las horas es muy fácil obtener la hora oficial.

En resumen, parece ser el más idóneo y práctico de todos los proyectivos, reuniendo el conjunto una serie de cualidades; como la facilidad de ejecución, captación de todas las horas de insolación, universalidad, auto-orientación, lectura cómoda y conversión de la hora solar en oficial, pudiendo contener a ambas en el mismo cuadrante. Para más detalles ver Analema nº 8.

CUADRANTES DEL GRUPO C

Relojes proyectados desde un **punto** de proyección sobre un plano elegido.

C-1) Reloj doble horizontal de William Oughtred.
Fig. 22.

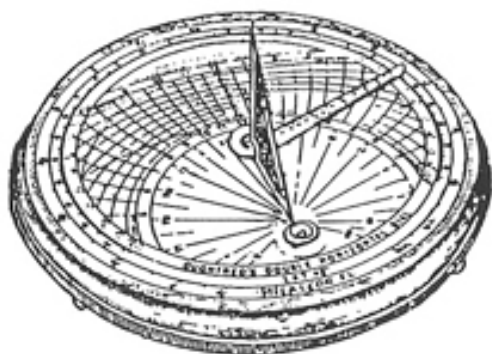
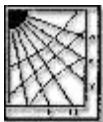


Figura 22. Reloj doble horizontal de William Oughtred

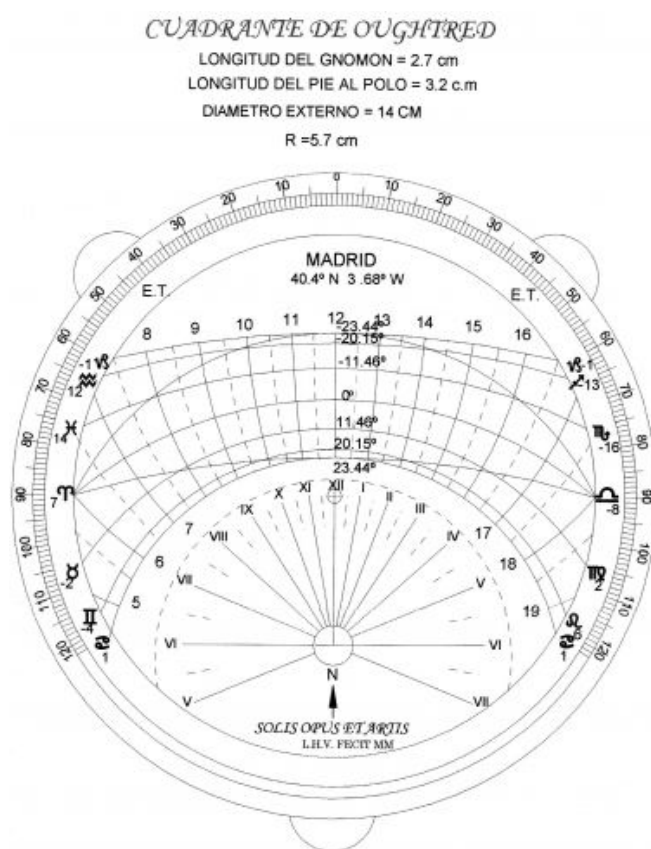


Figura 22b. Ejemplo de reloj doble horizontal de William Oughtred (calculado para Madrid)

Se trata de la combinación de un reloj convencional horizontal de estilo polar con otro de proyección estereográfica, cuyo punto de proyección (p) es el zénit y el plano de proyección (PP) es el horizonte. Por lo que se le ha llamado **astrolabio horizontal**.

Al combinar dos sistemas de medida diferentes (acimut y ángulo horario), se convierte en auto-orientable cuando se lea la misma hora, en cada cuadrante.

Además de señalar la hora en cualquier momento del día, nos proporciona la hora y orientación del orto y del ocaso, duración del día, lugar del Sol en la eclíptica, etc. Todos ellos son datos astronómicos de gran interés.

Se calcula la longitud mínima del gnomon perpendicular al plano y la del estilo polar, para que con una sola placa triangular sirva a los dos relojes. Para más detalles ver el artículo de Analema nº 11.

El cálculo se basa en la expresión:

$$Lg = R(\cos \varepsilon - \cos \varphi) / \tan(\varphi - \varepsilon)(\sin \varphi + \sin \varepsilon),$$

equivalente a:

$$Lg = R \tan^{1/2}(\varphi - \varepsilon) / \tan(\varphi - \varepsilon).$$

Distancia al polo del cuadrante horizontal, desde el centro: $R \tan(\varphi - \varepsilon) / 2 \tan(\varphi - \varepsilon) \tan \varphi$.

CUADRANTES DEL GRUPO D

Relojes derivados de la proyección de los **círculos de la esfera** desde una dirección o un punto sobre un plano determinado.

D-1) Proyección ortográfica de los círculos de la esfera sobre un plano horizontal dado. Siendo la dirección de proyección (DP) desde el zénit sobre un plano horizontal. Fig. 23.

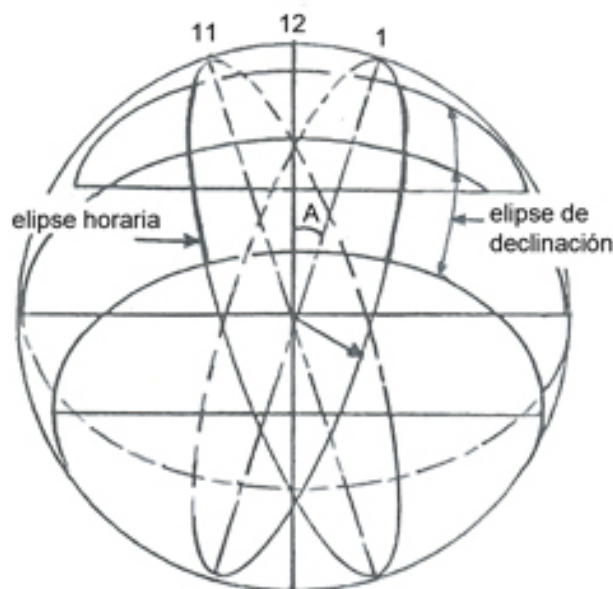


Figura 23. Proyección ortográfica de los círculos de la esfera sobre plano horizontal

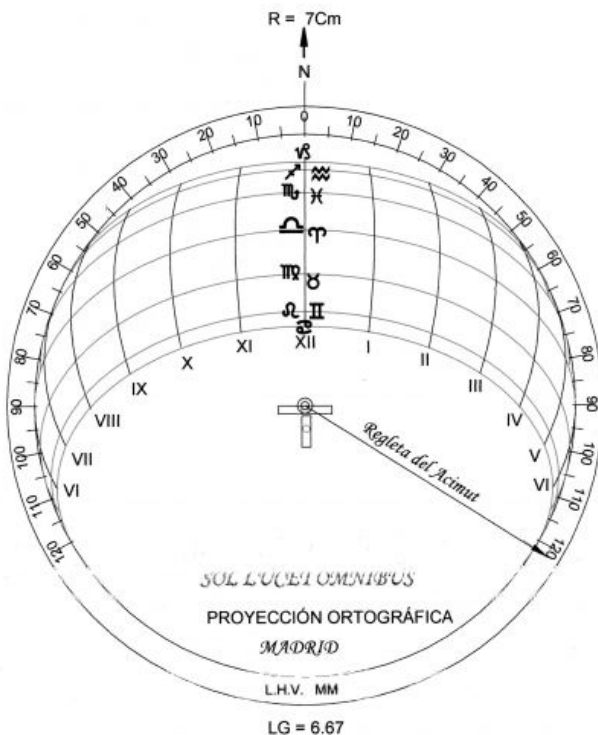
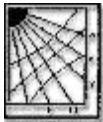


Figura 23b. Ejemplo de Proyección ortográfica (calculado para Madrid)

En este caso no existe proyección centrográfica cilíndrica como en los ejemplos antes analizados, por lo cual el gnomon permanece fijo.

Se podría admitir como una variante del analemático de Vaulezard en el que, al no haber la proyección sobre el cilindro, las elipses son diferentes, lo que complica bastante el trazado.

Recordemos que los analemáticos se pueden construir también como cuadrantes con estilo fijo, con sólo desplazar las líneas, círculos o elipses de referencia horaria, la misma longitud que lo hace el estilo móvil, como el "reticular", que ya vimos antes.

En el analemático de Vaulezard, existe esa previa proyección cilíndrica con lo cual al proyectarla, los círculos de la declinación del Sol son exactos a la magnitud del ecuador, por lo tanto sus proyecciones son elipses iguales. Si a esta dificultad en el trazado de las elipses de declinación se suma la de las horarias, aunque éstas son iguales, evidentemente (los meridianos son círculos máximos) nos daremos cuenta de la simplicidad del cuadrante de Vaulezard.

La longitud del estilo es: $Lg = R \cos(\varphi - \varepsilon)$

Elipses de declinación:

Semi-ejes, mayor: $R \cos \delta$, el menor: $\cos \delta \sin \varphi$

Centros: $R \cos \varphi \sin \delta$

Elipses horarias:

Polos = $R \cos \varphi$ Semi-ejes, mayor: R , el menor: $R \cos \varphi$

sen H

Acimutes: $\tan ac = \sin \varphi \tan H$

D-2) Proyección de los círculos de la esfera sobre el plano meridiano. Fig. 24.

Al proyectar ortográficamente los círculos de declinación solar sobre dicho plano, se convierten en rectas paralelas al ecuador, a distancias (sen δ).

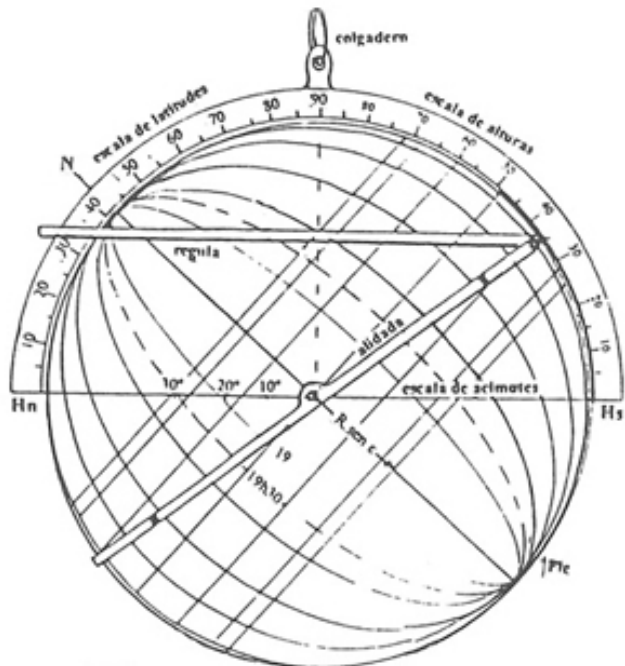


Figura 24. Proyección de los círculos de la esfera sobre el plano meridiano

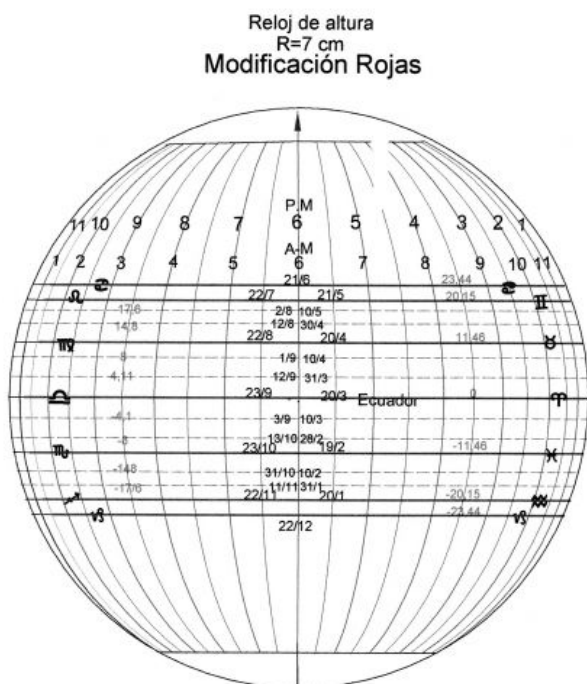


Figura 24b. Reloj de altura, modificación del Astrolabio de Rojas 1 –carátula-

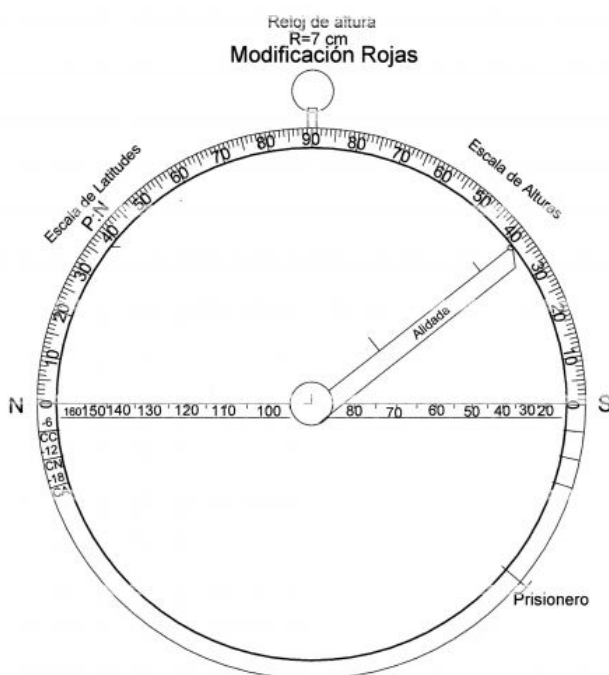
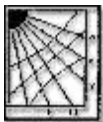


Figura 24c. Reloj de altura, modificación del Astrolabio de Rojas 2 –escalas-

Los meridianos se proyectan como elipses que pasan por los polos N y S con el mismo eje mayor (2R) y el eje menor según el valor de $(\sin H)$.

En estas condiciones podemos conocer la hora del **orto** y del **ocaso**, pues sólo se necesita seguir visualmente la línea de declinación solar de acuerdo con el día de la determinación, hasta que toque al horizonte; el punto de encuentro estará sobre, o entre, las elipses horarias. También siguiendo el mismo proceder se podrá saber la hora de paso por el **primer vertical**, cuando la línea de declinación solar corte a la línea imaginaria OZ (zénit), el punto de encuentro caerá sobre, o entre, las elipses horarias.

Si a la proyección se le agrega una escala graduada de 0 a 90° (escala de latitudes), la posición que está en el dibujo para la latitud 40,44° puede adaptarse para otra cualquiera, para otro punto de la Tierra. La continuación de esta escala de latitudes nos puede servir para la medición de la altura solar, que llamaremos escala de alturas.

Solamente nos queda añadirle una alidada o sistema de pínulas para que el rayo de sol las atravesase y nos dé la medida en la escala específica. Con la *"régula"* la trasladamos paralela al horizonte hasta que corte a la línea de declinación; el punto de encuentro señalará la hora en las elipses horarias. Se hará notar que estando acoplado a la latitud de trabajo, sin necesidad de utilizar la alidada, las líneas de declinación nos darán la altura máxima para ese día, es decir, la altura que alcanza el Sol a mediodía, cuando culmina o pasa por el meridiano. Finalmente, si el horizonte se gradúa en función de $\sin H$

(ángulo horario) podemos conocer la amplitud ortiva y occidua sin usar la alidada ni la *"régula"*

Si queremos conocer el acimut instantáneo a una hora determinada, con la ayuda de la régula en el punto horario pondríamos el borde fiducial de la *"régula"* y lo llevamos paralelo a la línea que une el eje de giro con el colgadero. Ahora, el borde fiducial nos indicaría el acimut instantáneo en la escala del horizonte.

Para más claridad pongamos un ejemplo. La latitud de utilización es como siempre 40,4° (Madrid) y la fecha de 21 de junio. Se ajustará al índice a la graduación 40,4° en la escala de latitudes y se fijará su posición con el tornillo prisionero, con lo que la esfera del reloj quedará solidaria con la escala de latitudes y la altura. En esta posición, sin utilizar ni la alidada ni la régula, sólo con seguir con la vista la línea de declinación correspondiente al comienzo del signo de Cáncer ($\delta = 23,44^\circ$), observaremos que corta al horizonte en un punto que coincide con la elipse de las 7:30 h (p.m.) o 19:30 h. El cálculo nos arroja un valor de 19:26:36 h, hora del ocaso. La hora del orto para ese día es el mismo punto y la misma elipse 4:30 h (4:33:24 h por el cálculo).

Por ende, conoceremos la duración de la insolación; 15 h (14:53:12). Ese mismo punto en la escala del horizonte señala 30°, lo que nos indica que la amplitud **ortiva-occidua** es ese valor, o sea que el Sol sale y se pone por un punto del horizonte separado por un ángulo de 30° al Norte de la línea E-W (primer vertical), (por el cálculo $31^\circ 29' 23''$). Si a esos 30° se le suman 90° tendremos el acimut contado desde el horizonte Sur de ese momento 120° (por el cálculo se obtiene $121^\circ 29' 23''$).

Si continuamos la observación, nos daremos cuenta que la línea de declinación corta a la línea imaginaria **eje de rotación-colgadero**, en la elipse de las 4 h de la tarde y 8 h (15:57:24 y 8:02:36 h), hora de paso por el primer vertical.

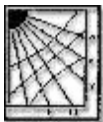
La sombra de cualquier objeto vertical cae en ese momento sobre la dirección E-W y adicionalmente nos orienta espacialmente.

Si seguimos con la observación y nos vamos con la vista hacia la escala de alturas, vemos que la línea de declinación corta a dicha escala en la graduación 73°, que representa la altura máxima del Sol en el momento de la culminación, momento del mediodía en que el Sol pasa por el meridiano de Madrid ($73^\circ 2' 24''$).

Los datos obtenidos se han conseguido en la posición de trabajo, sin intervención de la alidada y la régula.

Ahora deseamos conocer la hora a través de la altura del Sol en un instante dado de ese día. Con el colgadero suspendido, dirigimos la alidada de tal forma que el rayo de sol entre a través de las pínulas o similares, con lo que se obtiene la altura en la escala de alturas.

Supongamos que la altura del Sol en el momento de la determinación en la escala de las alturas nos da un valor de 38°. Fijamos la alidada en ese punto extendemos la *"régula"* de tal modo que la línea de referencia de ésta toque el punto 38° de la escala de latitudes, con lo que la *"régula"* estará inevitablemente paralela al horizonte N-S; ahora, cortará a la línea de declinación en un punto que



estará sobre (o entre) las elipses horarias y en este caso está sobre la elipse de las 4 h (p.m.) y 8 h.

La solución es ambivalente pero a la hora práctica tal no se produce. Si nos pidieran el acimut instantáneo para esa hora sólo tendríamos que bajar por medio del borde fiducial de la "régula" o perpendicular al horizonte y leer en la escala de éste el acimut.

En el ejemplo anterior, como precisamente estaba pasando por el primer vertical, su acimut es 90° (línea E-W).

La altura según el cálculo es de $37^\circ 51' 42''$ en vez de los 38° aparecida en la escala de altura. Los errores son lógicos y se deben a la apreciación subjetiva, a los derivados de la mecánica y a la propia naturaleza del cuadrante, que jamás nos puede dar las décimas de segundo de arco, como es comprensible, pero para los efectos prácticos es más que suficiente. La idea está basada en el astrolabio de Rojas con ligeras modificaciones para adaptarlo a un reloj solar de altura.

D-3) Relojes derivados de la proyección de los círculos de la esfera desde una dirección o punto de proyección sobre un plano determinado. Reloj pendular de Manuel Lombardero, fig. 25, descrito en nuestro boletín *Analema* n° 3 bajo el título "*Relojes analemizantes*".

Se trata de un reloj proyectivo, en el que el círculo ecuatorial y el segmento $R \tan \varepsilon$ sufren una proyección estereográfica, desde el Nadir, sobre el horizonte y en el plano meridiano.

Como sucede en toda proyección estereográfica, los círculos de la esfera son proyectados como otros círculos, por lo que el círculo ecuatorial se proyecta como otro círculo que llamaremos de referencia y en el que van insertas las horas.

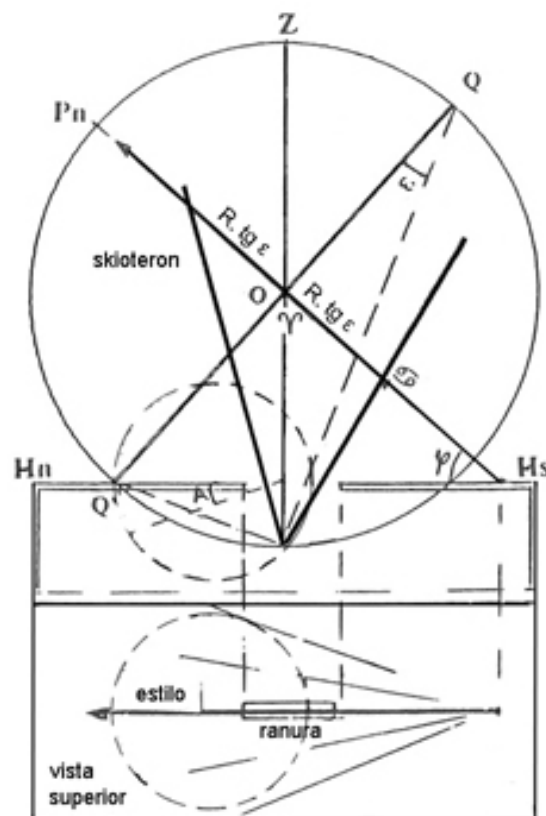


Figura 25. Proyección de los círculos de la esfera desde un punto sobre un plano determinado

El segmento $R \tan \varepsilon$ se proyecta también desde el mismo punto sobre el horizonte, creando en él la escala de desplazamiento según las fechas del estilo móvil, que el autor llama "*Skioteron*", el cual oscila o **pendula** de un extremo a otro de la escala en el transcurso del año, de forma similar, aunque de manera más lenta, que un "*metrónomo*".

Este reloj es un combinado de un reloj horizontal direccional a estilo polar (el clásico reloj de sol de jardín) con un proyectivo triple. Una previa proyección centrográfica cilíndrica está seguida de una proyección ortográfica del segmento $R \tan \varepsilon$ sobre el plano meridiano y por último, hay una tercera proyección estereográfica, desde el Nadir, de este segmento sobre el horizonte.

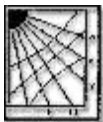
Se debe tener en cuenta que, a diferencia del astrolabio horizontal del "*Oughthred*", sólo se proyecta el círculo ecuatorial y el segmento $R \tan \varepsilon$ generando un estilo móvil, en contraste con el de aquel autor, que permanece fijo. También es de resaltar que las oscilaciones del estilo, o lo que es lo mismo, las divisiones de la escala de fechas en la entrada de los signos del zodiaco tampoco son iguales.

El radio de la circunferencia horaria será:

$$r = R/2 (\sin \varphi + (1 - \cos \varphi) \tan^{1/2} \varphi)$$

Horas: se calculan a través del acimut en los equinoccios ($\delta = 0$) según la fórmula:

$$\tan ac = \tan H / \sin \varphi, \text{ siendo } H \text{ el ángulo horario.}$$



Longitud mínima del skioterón: $L_g = R(1/\cos^2 \varepsilon + 2 \tan \varepsilon \sin \varphi)^{1/2}$.

Escala de fechas: A título de ejemplo se calcula la longitud de la escala entre los solsticios de verano (21 de junio) y de invierno (22 de diciembre). Nos valdremos de los ángulos α y β que corresponden al verano y al invierno:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \tan \varepsilon \cos \varphi / (1/\cos^2 \varepsilon + 2 \tan \varepsilon \sin \varphi)^{1/2} \\ E_f &= R(1 - \cos \varphi) \tan \varphi, \text{ (solsticio de verano).} \\ \sin \beta &= \tan \varepsilon \cos \varphi / (1/\cos^2 \varepsilon + 2 \tan \varepsilon \sin \varphi)^{1/2} \\ E_f &= R(1 - \cos \varphi) \tan \beta, \text{ (solsticio de invierno).}\end{aligned}$$

Para las declinaciones intermedias, que corresponden a las entradas en los signos del zodiaco, se usarán en las fórmulas, δ en vez de ε .

Se hace notar que para un radio $R = 7,5$ cm, la longitud total de la escala de fechas será: $E_f = 1,27$ cm, cifra relativamente pequeña, en la que es difícil grabar las marcas de la entrada de los signos, máxime siendo asimétricas.

Se añade como comentario aparte, que si al cuadrante descrito se le agrega otro horizontal a estilo polar (el clásico de jardín), se conseguirán ventajas sustanciales. El conjunto se convertiría en "*auto-orientable*", que puede prescindir del uso de la brújula. Cuando las sombras proyectadas por el estilo polar y por el skioterón marquen la misma hora, el conjunto estará orientado, ya que partimos de dos medidas diferentes: el ángulo horario y el acimut o pseudo-acimut.

Si el skioterón se desplaza sobre el estilo polar en la magnitud $R \tan \varepsilon$; resulta que es simétrica, es más fácil calcular y es mayor que la escala E_f horizontal. Así, habremos conseguido precisión y rapidez en la colocación del "*skioterón*", haciendo innecesario de esta manera un engorroso cálculo.

El cuadrante dispone de dos estilos: el clásico y el que se denomina pendular. En realidad, este cuadrante no aporta nada esencial, como muchos de los aquí descritos.

EN RESUMEN, se ha procurado hacer un estudio analítico de los relojes de sol conocidos hace centurias, dotarlos de un cálculo de la longitud mínima de los estilos. Aunque estoy en parte con el dicho latino "*sub sole nihil novus*", en este estudio hay novedades, que si en parte no representan un sentido práctico, al menos constituyen un ejercicio matemático.

Antes de finalizar estas notas, un tanto discutibles y discutidas que suponen una ruptura del sentido conservador que se tiene de la gnomónica clásica decimonónica, un tanto candorosa e ingenua, deseamos que sirvan para rendir un homenaje póstumo a mi estimado amigo y admirando maestro Jaime Velilla

Moros, que con su solvencia técnica y estilo sereno supo cultivar los aspectos más recónditos de esta ciencia, siempre motivado por su insaciable curiosidad, explorando los aspectos más desconocidos, legándonos unas notas inéditas, ejemplo de sus proyectos inagotables, escritas con un espíritu crítico y creativo, pletóricas de madurez intelectual, marcadas por su seriedad analítica y sobre todo tan didácticas que nos han inspirado, influido y estimulado y cuya lectura supone un motivo de deleite, quedando atrapados por su germen prolífico y siempre cautivados por la trayectoria de su buen hacer.

Que estas humildes líneas, más o menos hilvanadas, sirvan como justificación del tributo de recuerdo y honra a su memoria.

Dr. Luis Hidalgo

NOTA SOBRE LA REEDICIÓN DEL ARTÍCULO

Este artículo se publicó en un número extraordinario de la revista *Analema* (número 29 de mayo-agosto de 2000) de la AARS.

En febrero de 2015 dicho artículo se incluyó en la web de la Asociación al considerar de importancia su divulgación. Se pudo contar para ello con la inestimable colaboración del autor, Luis Hidalgo, presidente de la AARS hasta 2005. Su ayuda fue muy importante para aclarar detalles durante la redacción y, además, por su aporte de una buena cantidad de nuevas figuras (todas las terminadas en "b, c, d y bis"), como ejemplos de los distintos tipos de relojes proyectivos. Se ha respetado el texto original y la numeración de sus figuras.

El autor ha fallecido hace pocos meses, publicando de nuevo el artículo como AARS-046, con los gráficos añadidos el pasado año, rendimos un humilde homenaje a su persona.

El artículo y su versión web pueden encontrarse en el siguiente enlace: <http://relojesdesol.info/node/1450>